

**Bedienungsanleitung
zu
Termevaluator Version 4.3
(15.10.2021)**

**Eine mathematische Software
für Blinde und Sehbehinderte
in Schule, Studium und Beruf**

Dr. Meinhard Sponheimer, StD a.D.
Fachlehrer für Mathematik u. Physik
Carl-Strehl-Schule
Deutsche Blindenstudienanstalt Marburg e.V., Marburg

E-Mail: sponheimer@blista.de

Inhaltsverzeichnis

**Gewünschte Zeile anklicken oder Cursor mit den Tasten
"Pfeil nach unten" und anschließend „Pfeil nach rechts“
in diese Zeile verschieben und [ENTER] drücken !
Zurück zum Inhaltsverzeichnis mit [ALT] + [Pfeil nach links]**

Einführung.....	5
Deinstallation	9
Tab.1: Mathematische Funktionen	10
Hilfen	19
Eingabe in LATEX.....	20
Speicherung von Daten	21
Umwandlung in ein anderes Zahlensystem (Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem).....	23
Komplexe Zahlen	24
Berechnungen mit 26-stelliger Genauigkeit.....	25
Bruchrechnung / Periodische Dezimalbrüche.....	26
Prozentrechnung	28
Polarkoordinaten/Kartesische Koordinaten	30
Mittelwert / Standardabweichung	31
Korrelationskoeffizient / Ausgleichs(Regressions)gerade	33
Lineare und nichtlineare Regression	34
Quantile (Inverse Verteilungsfunktion) für die Standardnormalverteilung	42
Die zur Normalverteilung $CNorm(x m s)$ inverse Funktion $ICNorm(p m s)$	44
Funktionsauswertung.....	45
Funktionswertetabelle	46
Funktionswertetabellen für spezielle Funktionen - Kurzbefehle -	48
Funktions- / Kurvenschar	49
Abschnittsweise definierte Funktionen.....	50
Polynominterpolation	51
Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren	53
Umwandlung von Polynomtermen in Standardform $p(x)$;	54
1. Ableitung $p_1(x)$ und 2. Ableitung $p_2(x)$	54
Splineinterpolation	55
Nullstellen	57
Nullstellen (Polynome)	58
Ableitung an der Stelle x / Tangentengleichung	60
Hoch--, Tiefpunkte	61
Wendepunkte / Krümmungsverhalten	62
Integration (numerisch)	63
Abstand eines Punktes von einem Funktionsgraphen.....	64
Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$	66

Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$ mit einer Nebenbedingung(NB)	67
Gleichungen (mit einer Unbekannten).....	69
Gleichungen mit logarithmischen Termen / Wurzeltermen	72
Quadratische Gleichungen	73
Algebraische Gleichungen / Bruchgleichungen.....	74
Lineare Gleichungssysteme	77
Überbestimmte lineare Gleichungssysteme (mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten)	79
(Nicht)Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten (x,y).....	82
Matrixverfahren GAUSS-JORDAN (zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen).....	84
Allgemeine Gleichung für Kegelschnitte: $A \cdot x^2 + B \cdot xy + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$	87
Matrixmultiplikation.....	89
Matrixaddition / -subtraktion	92
Matrixpotenz	95
Matrixinvertierung	97
Skalares Vielfache einer Matrix.....	99
Rechnen mit gespeicherten Matrizen	101
Anzeigen und Ändern von Matrizen	102
Determinantenberechnung	103
Eigenwerte / Eigenvektoren	105
Lineare Optimierung.....	109
Lote auf Geraden und (Hyper)Ebenen	114
Skalares Vielfache eines Vektors	118
Skalar- und Vektorprodukt; Vektorbetrag	118
Linearkombinationen von Vektoren	119
Lineare Geomerie im 3-dimensionalen Raum	121
Summe $(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b))$	125
Unendliche Reihen	126
Iterationen	130
Differenzialgleichungen (1. Ordnung)	131
Differenzialgleichungen (2. Ordnung)	134
Differenzialgleichungssysteme	137
Tab. 2: Beschreibung der Befehlsschaltflächen	139
Tab. 3: Beispiele	142
Menüsteuerung	144
Fenstersteuerung	145
Einstellungsdaten.....	146
Kontrasteinstellungen	147
Funktionsgraph	148
Bildformate	150
Speichern und Ausdrucken von Graphiken	151
Schnittpunkte zweier Graphen	152
Graphische Darstellung von Punkten und Streckenzügen (Polygonen)	153
Koordinateneingabe	154
Kurven mit impliziter Gleichung: $F(x y) = 0$	155
Kurven mit Parametergleichungen: $x = x(t)$; $y = y(t)$	156

Integration (graphisch).....	157
Tab. 4: Funktionsgraph	
Reihenfolge beim Durchgang mit der TAB-Taste.....	159
Beendigung	163
Unterprogramme zu „Termevaluator4.3“ - Beispiele	164
Bildbeispiele (Screenshots)	167

Einführung

Mit Hilfe der Software "Termevaluator" führt der Blinde / Sehbehinderte (und jeder andere Nutzer) Berechnungen barrierefrei auf seinem Computer aus, sofern eine Version des Betriebssystems Windows installiert ist. Komplexe mathematische Probleme (z.B. Auswertung von Integralen, Nullstellenberechnungen, Lösen von Gleichungen usw. (s. Inhaltsverzeichnis S. 2)) lassen sich numerisch bearbeiten. Der Nutzer gibt die Funktionsbefehle in der mathematisch üblichen Weise ein, ohne dass einzelne Funktionstasten betätigt werden müssen. Auch beim Einsatz von Screenreadern, Braillezeilen- und Vergrößerungsprogrammen ist der Rechner leicht zu bedienen. Besonderer Wert wird auf eine überschaubare Gliederung der Bedienungsfläche und auf eine variable Einstellung von Schriftfarbe, Schriftgröße und Hintergrundfarbe gelegt. Alle Bedienungselemente lassen sich auch über die Menüsteuerung erreichen. Bereits erfolgte Berechnungen können in einer Textdatei gespeichert oder in ein WORD-Dokument übernommen werden.

Zusätzlich bietet der "Termevaluator" die Möglichkeit der graphischen Veranschaulichung von Funktionen und Messdaten. Die graphische Darstellung kann auch als Vorlage für die Erstellung von taktilen Folien verwendet werden. In einigen Schulen ist der Einsatz von Grafikprogrammen untersagt. Für diese Fälle steht die weitere Version „Termevaluator ohne Graphik“ zur Verfügung. Der "Termevaluator" wird seit seiner Einführung (2006) an der Carl-Strehl-Schule (Deutsche Blindenstudienanstalt) im Mathematik-, Physik- und Chemieunterricht verstärkt verwendet. Die Bundesfachkommission für die Überprüfung von Lehr- und Lernmitteln befürwortet den Einsatz im Unterricht an Schulen für blinde und sehbehinderte Schülerinnen und Schüler.

Die Befehlsschaltflächen der Bedienungsfläche lassen sich mit Hilfe von Tastenkombibefehlen bedienen. Man drückt die Tastenkombination **[ALT] + "unterstrichener Buchstabe"** (siehe **Tab. 2**).

Beispiel: "**Ausgabe in Zwischenablage**": **[ALT] + [Z]**

Die verfügbaren mathematischen Funktionen sind in **Tab. 1 "Mathematische Funktionen"** zusammengestellt. Sie können zu beliebigen mathematischen Termen in der Variablen x kombiniert werden

(z.Bsp.: "**2*x*sin(x^2)+abs(cos(x))**").

Siehe auch Kapitel "Abschnittsweise definierte Funktionen" !

Abfolge der Bedienungsschritte:

Schritt I:

Der zu berechnende Term wird im ASCII-Code in das Textfeld **"Eingabe"** ([ALT] + [E]) eingetragen. Hierbei wird der Anwender durch das Schlagwortregister **"Index"** ([ALT] + [X]) unterstützt. Ohne großen Schreibaufwand lassen sich damit mathematische Terme in das Textfeld **"Eingabe"** einfügen. Hierzu sind nach dem Aufrufen der Befehlsschaltfläche **"Index"** die Anfangsbuchstaben des Schlagwortes in dem neu geöffneten Formular einzutragen, bis der gesuchte Term vollständig erscheint. Nach dem Aufrufen des Feldes **"OK"** ([ALT] + [O] oder [ENTER]) wird der gesamte Term in das Textfeld **"Eingabe"** übertragen. (s. hierzu **"Hilfen / Index"**). Bei Einträgen mit Platzhalter wie z.B. $\sin(a)$ ist die Position des Eintrags vormarkiert, so dass hier entweder eine Eingabe über die Tastatur oder über die Zwischenablage erfolgen kann.

Hinweise:

Multiplikationssymbol: " * "

Divisionssymbol: " / "

Pluszeichen " + "

Minuszeichen " - " (Bindestrich)

Exponentenzeichen " ^ "

Das Multiplikationssymbol „ * “ ist bei der Multiplikation einer Zahl mit einem Klammerterm oder einer Variablen immer zu schreiben.

(Beispiele: $2 \cdot (x+5)$ und nicht $2(x+5)!$.

$2 \cdot x$ und nicht $2x$!

Negative Zahlen sind mit ihrem Vorzeichen zu "klammern".

Beispiele: $(-7,1) \cdot (-2,3)$; $(-2)^4$

Die bei Kettenrechnungen gültigen Prioritätsregeln sind zu beachten.

Die Zeichenfolge „/-“ ist nicht zulässig !

Beispiele:

1. Statt $3/(-5)$ muss es richtig heißen: $3/(-5)$

2. Statt $(x+1)/-x^2$ muss es richtig heißen: $(x+1)/(-x^2)$

Bei Funktionen mit mehreren Argumenten (z.B.: Binomialkoeffizient:

$\text{"binco}(n|k)\text{"})$ sind die Argumente durch das Zeichen "|" voneinander zu trennen.

An Stelle des Trennungszeichens "|" kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon ";" verwendet werden !

Schritt II:

Vor der Auswertung sollte man die in der Kopfzeile festgelegten Einstellungen (**Stellenzahl, Winkleinheit, Runden auf 0**) überprüfen.

Stellenzahl:

Die Stellenzahl (Anzahl der führenden Stellen) kann auf 6, 10 oder 14 durch mehrmaliges Betätigen der Tastenkombination **[ALT] + [S]** festgelegt werden. Andere Werte **n** lassen sich manuell eingeben (**[ALT] + [S]** und anschließend **[n]**).

Wissenschaftliche Schreibweise:

Die Darstellung einer Zahl in wissenschaftlicher Schreibweise (scientific notation) erfolgt bei kleinen und sehr großen Zahlen.

Beispiele: (Stellenzahl = 6)

1.

Die Zahl **2345678** wird in der Form **2,34568E06** dargestellt.

2.

Die Zahl **0,0002345678** wird in der Form **2,34568E-04** dargestellt.

Allgemeine Regel:

Die Umstellung auf die wissenschaftliche Schreibweise erfolgt immer dann,

1.

wenn für die Zahl **Z** gilt: **Absolutbetrag von Z $\geq 10^{(n+1)}$**
(**n = eingestellte Stellenzahl**)

oder

2.

wenn für die Zahl **Z** gilt: **Absolutbetrag von Z $< 0,001$**

Die Darstellung in wissenschaftlicher Schreibweise wird **nach dem Eintrag der Zeichenfolge „EE“** (im Textfenster „Eingabe“) und **[ENTER]** auf alle Zahlen ausgeweitet. Ein weiterer Eintrag „EE“ und **[ENTER]** macht die Umstellung rückgängig.

Voraussetzung: Das Programm wird im Rechenmodus betrieben, also ohne Verwendung von Unterprogrammen (z.B. Nullstellen- oder Integralberechnung).

Winkeleinheit:

Ein Winkel kann in Altgrad **"DEG"** (Vollwinkel: 360°), im Bogenmaß **"RAD"** (Vollwinkel: 2π) und in Neugrad **"GRAD"** (Vollwinkel: 400 gon) gemessen werden (mehrmaliges Betätigen der Tastenkombination **[ALT] + [W]**).

Runden auf 0:

Bei der Verwendung von "kleinen" Werten ($|x| \ll 1$) ist die Option **"NEIN"** zu wählen. Bei dieser Einstellung erfolgt die Ausgabe in wissenschaftlicher Schreibweise (z.B.: "1,7E-13").

Mit **[ENTER]** erfolgt die Auswertung, wobei der Termwert im Textfeld **"Ausgabe"** erscheint. Alternativ kann auch die Befehlsschaltfläche **"Berechnung"** angeklickt werden. Bei einem Syntaxfehler oder einem nicht auswertbaren Term wie z.B. $5 \cdot (23 + r)^2$ oder $\sqrt{-2}$ erscheint im Textfeld **"Ausgabe"** die Fehlermeldung: **"Eingabe nicht korrekt"**.

(Enthält die **Eingabe** einen **Funktionsterm** in der Variablen „x“, schaltet das Programm mit **[ENTER]** in das Formblatt **„Funktionsauswertung“** um. Der

Funktionsterm kann dann mit verschiedenen Argumenten ausgewertet werden.)

Mit [TAB] durchläuft der Cursor die Felder "**Eingabe**", "**Ausgabe**", "**Löschen (Ausgabe)**", und "**Ausgabe in Zwischenablage**". Die Ausführung der entsprechenden Funktionen wird durch das Betätigen von [ENTER] ausgelöst. Mit der **Tastensequenz** [ALT] + [E] (bzw. [ALT] + [A]) und danach [Pfeil nach unten] lassen sich jederzeit die Inhalte der Textfelder „Eingabe“ bzw. „Ausgabe“ mit Hilfe des Screenreaders JAWS auslesen.

Ein zuvor berechnetes Ergebnis wird mit der Bezeichnung „**ans**“ - automatisch - gespeichert und kann in einer unmittelbar folgenden Rechnung wieder verwendet werden. „ans“ hat den Startwert 0 !

Beispiel: Eingabe: „3 + 5“ Ausgabe: „8“
 Eingabe: „ -7 + ans“ Ausgabe: „1“

Auch der **Inhalt des Eingabefensters** wird bei der Ausführung mit [ENTER] temporär gespeichert und kann (vor der nächsten Ausführung) mit dem **Befehl „RR“** (in der Eingabezeile) wieder geladen werden.

Zu einer ausführlichen Zusammenstellung aller Speicherbefehle s. Textabschnitt [Speicherung von Daten](#)

Eine Erläuterung aller Tastenbefehle finden sich in Tab. 2 "Beschreibung der Befehlsschaltflächen" !.

Deinstallation

Für eine Deinstallation sind der gesamte Ordner "Termevaluator" und das zugehörige auf dem Desktop befindliche Icon zu löschen !

Da das Programm bei der Installation nicht registriert wurde, ist es damit vollständig gelöscht.

Tab.1: Mathematische Funktionen

Beschreibung	Symbol
Absolutbetrag von a	abs(a)
Areasinus hyperbolicus von a	areasinh(a)
Areakosinus hyperbolicus von a	areacosh(a)
Areatangens hyperbolicus von a	areatanh(a)
Areakotangens hyperbolicus von a	areacoth(a)
Arkuskosinus von a	acos(a)
Arkussinus von a	asin(a)
Arkustangens von a	atan(a)
Arkuskotangens von a	acot(a) actg(a) (*)
Binomialkoeffizient ("n über k"))	binco(n k) oder binco(n;k) oder binom(n k) oder binom(n;k)
Binomialverteilung	DBinom(k n p) oder DBinom(k;n;p) (k = Zahl der Erfolge, n = Zahl der Versuche, p = Erfolgswahrscheinlichkeit)
Binomialverteilung kumuliert	CBinom(k n p) oder CBinom(k;n;p) (k = Zahl der Erfolge, n = Zahl der Versuche, p = Erfolgswahrscheinlichkeit)
Exponentialfunktion (natürlich)	e ^{#^a} oder exp(a)
Fakultät	fact(a)
Ganzzahliger Anteil der Zahl a	fix(a)
Größter gemeinsamer Teiler von a und b	gcd(a b) oder gcd(a;b)
Kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b	lcm(a b) oder lcm(a;b)
Kosinus von a	cos(a)
Kosinus hyperbolicus von a	cosh(a) chy(a) (*)
Kotangens von a	cot(a) ctg(a)
Kotangens hyperbolicus von a	coth(a)
Kubikwurzel aus a	cub(a)
Logarithmus von a zur Basis 10	lg(a), log10(a)

Logarithmus von a zur Basis n	logN(a n) oder logN(a;n)
Natürlicher Logarithmus von a	ln(a)
Nachkommaanteil der Zahl a	dec(a)
Normalverteilung	DNorm(x m s) oder DNorm(x;m;s) (m = Mittelwert; s = Standardabweichung)
Normalverteilung integriert	CNorm(x m s) oder CNorm(x;m;s) (m = Mittelwert; s = Standardabweichung)
Inverse zur Normalverteilung integriert	ICNorm(p m s) oder ICNorm(p;m;s) S. hierzu auch Bedienungsanleitung! (p = Wahrscheinlichkeit; m = Mittelwert; s = Standardabweichung)
n-te Wurzel aus a	root(a n) oder root(a;n)
Permutation (n_k)	perm(n k) oder perm(n;k)
Poissonverteilung	DPoisson(k v) oder DPoisson(k;v) (k = Zahl der Erfolge v (Varianz) = np n = Zahl der Versuche, p = Erfolgswahrscheinlichkeit)
Poissonverteilung kumuliert	CPoisson(k v) oder CPoisson(k;v) (k = Zahl der Erfolge v (Varianz) = np n = Zahl der Versuche, p = Erfolgswahrscheinlichkeit)
Quadratwurzel aus a	sqr(a), sqrt(a)
n-te Wurzel aus a	root(a n) oder root(a;n)
Kubikwurzel aus a	cub(a)
Runden von a auf n Kommastellen	round(a n)
Konvertierung des Winkels a (in der Einheit DEG gemessen) in die programmäßig voreingestellte Einheit	deg(a)
Konvertierung des Winkels a (in der Einheit RAD gemessen) in die programmäßig voreingestellte Einheit	rad(a)
Konvertierung des Winkels a (in der Einheit GRAD gemessen) in die	grad(a)

programmmäßig voreingestellte Einheit	
Kubikwurzel aus a	cub(a)
Signum-Funktion	sgn(a)
Sinus von a	sin(a)
Sinus hyperbolicus von a	sinh(a)
Tangens von a	tan(a)
Tangens hyperbolicus von a	tanh(a)
Zufallszahl zwischen 0 und a	rnd(a)
Kopieren des Inhaltes von Textfenster „Ausgabe“ in den unabhängigen Speicher „M“	Tastencode: [ALT] + [1]
Einfügen des Inhaltes des Speichers „M“ an der durch den Cursor festgelegten Position	Tastencode: [ALT] + [2]
Addieren der Zahl nn zum Inhalt des Speichers „M“	Eingabe: „M + nn“
Subtrahieren der Zahl nn vom Inhalt des Speichers „M“	Eingabe: „M - nn“
Konvertierungsfunktionen in andere Zahlensysteme	
Kubikwurzel aus a	cub(a)
Dezimal- nach Binärsystem	TastenCode: [STRG] + [F2] BIN(a)
Binär- nach Dezimalsystem	TastenCode: [UMSCHALT] + [STRG] + [F2] INVBIN(&B...)
Dezimal- nach Oktalsystem	TastenCode: [STRG] + [F8] OKT(a)
Oktal- nach Dezimalsystem	TastenCode: [UMSCHALT] + [STRG] + [F8] INVOKT(&O...)
Dezimal- nach Hexadezimalsystem	TastenCode: [STRG] + [F6] HEX(a)
Hexadezimal- nach Dezimalsystem	TastenCode: [UMSCHALT] + [STRG] + [F6] INVHEX(&H...)
Rechnen in anderen Zahlensystemen:	
im Binärsystem	TastenCode: [STRG] + [F2] Kennung von Binärzahlen: "&B..."

im Oktalsystem	TastenCode: [STRG] + [F8] Kennung von Oktalzahlen: "&O..."
im Hexadezimalsystem	TastenCode: [STRG] + [F6] Kennung von Hexadezimalzahlen: "&H..."
Dezimalzahlen mit 26 Stellen	TastenCode: [STRG] + [D] Eingabe: "DEZ....."
Rechnen mit komplexen Zahlen " $a + bi$ " Ausgabe in kartesisch. Koordinaten	TastenCode: [STRG] + [K] Eingabe: "KOM....."
Rechnen mit komplexen Zahlen " $a + bi$ "P Ausgabe in Polarkoordinaten	TastenCode: [STRG] + [P] Eingabe: "POL....."
Rechnen mit (Dezimal)Brüchen	TastenCode: [STRG] + [B] Eingabe: "BR....."
Umrechnen von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten	Eingabe: „POLAR [ENTER] “
Umrechnen von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten	Eingabe: „KART [ENTER] “
Eingabe in LATEX	“LAT “
Prozentrechnung	
Prozentwert(PW)	Eingabe: „PW“ [ENTER]
Prozentsatz(PS)	Eingabe: „PS“ [ENTER]
Grundwert(GW) vorgeg.: Prozentwert(PW) und Prozentsatz(PS)	Eingabe: „GWPW“ [ENTER]
Grundwert(GW) vorgeg.: vermehrter Grundwert(VW) und Prozentsatz(PS)	Eingabe: „GWVW“ [ENTER]
Vermehrter Grundwert(VW)	Eingabe: „VW“ [ENTER]
Verminderter Grundwert(MW)	Eingabe: „MW“ [ENTER]
Mittelwert, Standardabweichung	TastenCode: "[STRG] + [D]" Eingabe: „DATEN“
Eingabe von Daten (Koordinaten) für die graphische Darstellung (zusätzlich: Angabe der Gleichung der Ausgleichs(Regressions)geraden und des Korrelationskoeffizienten)	Eingabe: "A x... y... x... y... x....."
Lineare und nichtlineare Regression	Eingabe: „REGTYP... x..y..x..y..x..y
Quantile (für	Eingabe: „quantil(p)

Standardnormalverteilung)	
Quantile beidseitig (für Standardnormalverteilung)	Eingabe: „quantilbs(p)
Erstellen einer (Funktions)Wertetabelle	TastenCode: [STRG] + [F] Eingabe: "FUN a b step h f(x)"
Funktionen--/Kurvenschar	Eingabe: „SCHAR“ [ENTER]
Polynominterpolation	Eingabe: „POLY „[ENTER]
Zerlegung von Faktoren in irreduzible Faktoren	Eingabe: „ALG Z „ [ENTER]
Umwandlung von Polynomtermen in Standardform	Eingabe: „ALG S „ [ENTER]
Polynom; 1. und 2. Ableitung	Eingabe: „ALG S „ [ENTER]
Splineinterpolation	Eingabe: „SPLINE“ [ENTER]
Nullstellen einer Funktion f	TastenCode: [STRG] + [N] Eingabe: "NULL a b f(x)"
Nullstellen eines Polynoms	Eingabe: "NULLPOLY n“ (1 <= n <= 9)
Ableitung an der Stelle x	TastenCode: [STRG] + [A] Eingabe: "ABL“ [ENTER]
Tangentengleichung	TastenCode: [STRG] + [A] Eingabe: "ABL x=... f(x)=... T“
Hoch- u. Tiefpunkte (Maxima u. Minima)	TastenCode: [STRG] + [H] Eingabe: "MAX a b f(x)"
Maximum und Minimum bei Funktionen mit 2 Variablen $z = f(x,y)$	TastenCode: [STRG] + [Z] Eingabe: "EXTR" [ENTER]
Maximum und Minimum bei Funktionen mit 2 Variablen $z = f(x,y)$ und einer Nebenbedingung(NB)	TastenCode: [STRG] + [E] Eingabe: "EXNB" [ENTER]
Wendepunkte / Krümmungsverhalten	TastenCode: [STRG] + [W] Eingabe: "WEN a b f(x)"
Abstand Punkt - Funktionsgraph	TastenCode: [STRG] + [A] Eingabe: "ABST P x y f(x)"
Lösungen von Gleichungen mit 1 Unbekannten	TastenCode: [STRG] + [G] Eingabe: "GLG=....."
Quadratische Gleichungen	TastenCode: [STRG] + [Q] Eingabe: "QUAD“ [ENTER]
Algebraische Gleichungen / Bruchgleichungen	Eingabe: „ALG“ Gleichung
Lösen von linearen Gleichungssystemen	

mit 2 Unbekannten (x, y)	Eingabe: "GL2 / GB2 {...}{...}"
mit 3 Unbekannten (x, y, z)	Eingabe: "GL3 / GB3 {...}{...}{...}"
mit 4 Unbekannten (w, x, y, z)	Eingabe: "GL4 {...}{...}{...}{...}"
Überbestimmtes Gleichungssystem (mit 2 Unbekannten und 3 Gleichungen)	Eingabe: "ÜBER" [ENTER]
mit einem Matrixverfahren	TastenCode: [STRG] + [M] Eingabe: "GAUSS" [ENTER]
Matrixaddition	Eingabe: „MAT+“ oder „FMAT+“ [ENTER]
Matrixsubtraktion	Eingabe: „MAT-“ oder „FMAT-“ [ENTER]
Matrixmultiplikation	Eingabe: „MAT*“ oder „FMAT“ [ENTER]
Matrixpotenz	Eingabe: "PMAT" [ENTER]
Matrixinverse	Eingabe: "IMAT" [ENTER]
Skalares Vielfache einer Matrix	„SMAT“ [ENTER]
Eigenwerte/-vektoren (2 / 3 zeilige Matrizen)	Eingabe: „EIGEN“ [ENTER]
Eigenwerte/-vektoren (symmetrische Matrizen)	Eingabe: „EIGSYM“ [ENTER]
(Nicht)lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten (x, y)	TastenCode: [STRG] + [Y] Eingabe: "GXY" [ENTER]
Lineare Optimierung	TastenCode: [STRG] + [O] Eingabe: "LOP" [ENTER]
Lot auf Gerade / (Hyper)Ebene	TastenCode: [STRG] + [L] Eingabe: "LOT" [ENTER]
Skalares Vielfache eines Vektors	Eingabe: „SV s * (a b c)“
Skalarprodukt zweier Vektoren	Eingabe: „SP (a b c)(d e f)“
Vektorprodukt	Eingabe: „VP (a b c)(d e f)“
Vektorbetrag	Eingabe: „VB s (a b c)“
Vektorkoordinaten von a, b, ..., f	Eingabe: RS a()b().....f()
Linearterm von Vektoren a, b, ..., f	Eingabe: „LIN (Linearterm)“
Lineare Geometrie	
Abstand Punkt-Gerade	Eingabe: „PUGE“ [ENTER]
Abstand Gerade-Gerade	Eingabe: „GEGE“ [ENTER]
Schnittgerade Ebene-Ebene	Eingabe: „EBEB“ [ENTER]
Schnittpunkt Gerade-Ebene	Eingabe: „GEEB“ [ENTER]
Parameter- in Koordinatenform(Ebenengleichung)	Eingabe: „PARKOO“ [ENTER]

Betrag eines Vektors	Eingabe: „VEK“ [ENTER]
Vektor - Vektor	Eingabe: „VEKVEK“ [ENTER]
Integrieren einer Funktion $f(x)$ in den Grenzen a und b	Tastencode: [STRG] + [I] Eingabe: "INT a b $f(x)$ "
Summe $f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f(b)$	Tastencode: [STRG] + [S] Eingabe: "SUM a b h $f(x)$ "
Unendliche Reihen	
Geometrische Reihe	Eingabe: „GEOREI“ [ENTER]
Harmonische Reihe	Eingabe: „HARMREI“ [ENTER]
Reihe mit rationalen Termen	Eingabe: „RATREI“ [ENTER]
Alternierende Reihe	Eingabe: „ALTREI“ [ENTER]
Iteration $x_{(k+1)} = f(x_{(k)})$ n Wiederholungen mit Startwert $x_{(0)} = a$	Tastencode: [STRG] + [T] Eingabe: "IT a n $f(x)$ "
Differenzialgleichung (1. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ Graphische Darstellung der Lösung $y(t)$	Eingabe: "DGL ta ya te $g(t, y)$ "
Differenzialgleichung (1. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ Graphische Darstellung von $y(t)$ und zusätzlich $2n$ weiterer Lösungen	Eingabe: "DG n ta ya te $g(t, y)$ " ($n = 1, 2, 3, \dots$)
Differenzialgleichung (2. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ und $ys(te)$ Graphische Darstellung von $y(t)$	Eingabe: "DGG ta ya ysa te $g(t, y, ys)$ " oder "DGGY ta ya ysa te $g(t, y, ys)$ "
Differenzialgleichung (2. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ und $ys(te)$ Graphische Darstellung von $y(t)$ und $ys(t)$	Eingabe: "DGGYYS ta ya ysa te $g(t, y, ys)$ "
Differenzialgleichung (2. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ und $ys(te)$ Graphische Darstellung von $ys(t)$	Eingabe: "DGGYS ta ya ysa te $g(t, y, ys)$ "
Differenzialgleichung (2. Ordnung) Berechnung von $y(te)$ und $ys(te)$ Erstellen eines	Eingabe: "DGGY-YS ta ya ysa te $g(t, y, ys)$ "

y-ys-Phasendiagramm	
Differenzialgleichung (2. Ordnung) Berechnung von $y(t_e)$ und $ys(t_e)$ Erstellen eines ys-y-Phasendiagramm	Eingabe: "DGGYS-Y ta ya ys te g(t, y, ys)".
Differenzialgleichungssystem Berechnung von $x(t_e)$ und $y(t_e)$ Graphische Darstellung der Lösungskomponenten $x(t)$ und $y(t)$	Eingabe: "DGSXYT ta xa ya te gx(...) gy(...)"
Differenzialgleichungssystem Berechnung von $x(t_e)$ und $y(t_e)$ Erstellen eines x-y-Phasendiagramms	Eingabe: "DGSX-Y ta xa ya te gx(...) gy(...)"
Differenzialgleichungssystem Berechnung von $x(t_e)$ und $y(t_e)$ Graphische Darstellung der Lösungskomponente $x(t)$	Eingabe: "DGSXT ta xa ya te gx(...) gy(...)"
Differenzialgleichungssystem Berechnung von $x(t_e)$ und $y(t_e)$ Graphische Darstellung der Lösungskomponente $y(t)$	Eingabe: "DGSYT ta xa ya te gx(...) gy(...)"
Eingabe von Daten (Koordinaten) für die graphische Darstellung	Eingabe: "P x... y... x...y... x....."
Eingabe von Daten (Koordinaten) für die graphische Darstellung (zusätzlich: Angabe der Gleichung der Ausgleichs(Regressions)geraden und des Korrelationskoeffizienten)	Eingabe: "A x... y... x... y... x....."
Kurve mit impliziter Gleichung: $F(x y) = 0$	Eingabe: „KURVE“ [ENTER]
Kurve mit Parametergleichungen: $x = x(t)$ und $y = y(t)$	Eingabe: „PKURVE“ [ENTER]
<u>Konstanten (Mathematik)</u>	
Pi	pi oder pi#
e = Eulersche Zahl	e#
<u>Konstanten (Naturwissenschaften)</u>	
Plancksche Konstante	h#
Elementarladung	q#

Avogadro Zahl	A#
Lichtgeschwindigkeit	c#
Gravitationskonstante	G#
Fallbeschleunigung	g#
Gaskonstante	R#
Elektrische Feldkonstante	eps#
Magnetische Feldkonstante	mu#
Elektronenmasse	me#
Protonenmasse	mp#
Neutronenmasse	mn#

(*)

Wenn die Eingabehilfe aktiviert ist, müssen die Funktionsnamen

"ctg(a)" (anstelle von **"cot(a)"**)

"chy(a)" (anstelle von **"cosh(a)"**)

"shy(a)" (anstelle von **"sinh(a)"**)

"thy(a)" (anstelle von **"tanh(a)"**)

"ctgh(a)" (anstelle von **"coth(a)"**)

"areactgh(a)" (anstelle von **"areacoth(a)"**),

verwendet werden !

Hilfen

a) Bedienungsanleitung

Unterstützung bei der Bedienung erhält man in umfassender Form durch die Datei "BedienungTermevaluator.doc" und "BedienungTermevaluator.pdf", die man mit der Befehlsschaltfläche "**Hilfe(doc)**" ([ALT] + [H]) bzw. "**Hilfe(pdf)**" ([ALT] + [F]) aufruft.

b) Tabellen

Die WORD-Datei "Uebersicht.doc" wird mit dem Aufruf der Befehlsschaltfläche "**Übersicht**" ([ALT] + [Ü]) geöffnet. Sie enthält die Tabellen "**Beschreibung der Befehlsschaltflächen**" und "**Mathematische Funktionen**".

c) Index (Schlagwortregister):

Mit dem Aufruf von "**Index**" ([ALT] + [X]) lassen sich ohne Schreibaufwand mathematische Terme in das Textfeld "Eingabe" einfügen. Hierzu sind nach dem Aufrufen der Befehlsschaltfläche "**Index**" die Anfangsbuchstaben des Schlagwortes in dem neu geöffneten Formular einzutragen, bis der gesuchte Term vollständig erscheint. Nach dem Aufrufen des Feldes "**OK**" ([ALT] + [O]) oder **[ENTER]**) wird der gesamte Term in das Textfeld "Eingabe" übertragen. Bei Einträgen mit Platzhalter (z.B. $\sin(a)$) ist die Position des Eintrags vormarkiert, so dass hier entweder eine Eingabe über die Tastatur oder über die Zwischenablage erfolgen kann.

Eingabe in LATEX

Eingaben in der Formelsprache LATEX sind zulässig. **Hierzu setzt man dem einzutragenden Term die Kennung „LAT“ voran.** Nach einem [ENTER] wird der Term in die übliche Schreibweise umgesetzt und mit einem weiteren [ENTER] ausgewertet.

Alle mathematischen Funktionen in einer Variablen sowie die Funktionen $\frac{Z}{N}$, $\text{Binom}\{n\}\{k\}$ können verwendet werden.

Beispiele:

1.

Eingabe: „LAT \sin(5)^2 + \cos(5)^2”

[ENTER]

„sin(5)^2 + cos(5)^2”

[ENTER]

Ausgabe: „1“

2.

Eingabe: „LAT \ln(\exp(100))”

[ENTER]

„ln(exp(100))”

[ENTER]

Ausgabe: „100“

3.

Eingabe: „LAT \frac{5/7}{1+7/8}” oder „LAT \f{5/7}{1+7/8}”

[ENTER]

„(5/7)/(1+7/8)”

[ENTER]

Ausgabe: „0,380952“

4.

Eingabe: „LAT BR \frac{5/7}{1+7/8}” oder „LAT BR \f{5/7}{1+7/8}”

[ENTER]

„BR (5/7)/(1+7/8)”

[ENTER]

Ausgabe: „8/21“

5.

Eingabe: „LAT \Binom{7}{5} + \Binom{8}{3}^2”

[ENTER]

„Binom(7|5)+Binom(8|3)^2”

[ENTER]

Ausgabe: „3157“

Speicherung von Daten

Speicherung Textfenster „Ausgabe“

Zur temporären Speicherung:

Sind einzelne Rechnungen separat voneinander auszuführen, wird nach jeder Rechnung das gerade vorliegende Ergebnis automatisch mit der Bezeichnung „**ans**“ gespeichert und kann in einer unmittelbar folgenden Rechnung wieder verwendet werden. Der alte Wert von „**ans**“ wird dabei überschrieben. „**ans**“ hat zu Anfang den Wert 0 !

Zur dauerhaften Speicherung:

Für eine dauerhafte Speicherung des im Textfenster **"Ausgabe"** befindlichen Wertes steht zusätzlich die Befehlsschaltfläche **„STO“** (**alternativ Tastenkombination [ALT] + [1]**) zur Verfügung. Der im Speicher **M** gesicherte Wert bleibt während der gesamten Sitzung und nach Abschalten des Rechners erhalten, wenn er nicht durch einen weiteren Wert überschrieben wird. Er kann mit der Befehlsschaltfläche **"RCL" ([ALT] + [2])** an der durch den Cursor festgelegten Position wieder eingefügt werden.

Speicherung Textfenster „Eingabe“:

Zur temporären Speicherung:

Der Inhalt des Eingabefensters wird bei jeder Ausführung mit **[ENTER]** temporär gespeichert. Dabei wird der bereits vorliegende Speicherinhalt überschrieben.

Mit dem Befehl **„RR“** (in der Eingabezeile) **[ENTER]** wird der Speicherinhalt geladen.

Zur dauerhaften Speicherung:

Dem Inhalt im Textfenster „Eingabe“ ist der Befehl **„RS“** voranzustellen. Der mit **[ENTER]** gesicherte Wert bleibt während der gesamten Sitzung und nach Abschalten des Rechners erhalten, wenn er nicht durch einen weiteren Wert überschrieben wird.

Mit dem Befehl **„RZ“** kann der Inhalt wieder geladen werden.

Alternativ wird mit dem Eintrag „STO xx“ (xx beliebiger Ausdruck mit/ohne Text) im Textfeld „Eingabe“ und [ENTER] der Speicher M überschrieben.

Mit dem Eintrag **„STO“** im Textfeld „Eingabe“ und **[ENTER]** wird der Speicher **M** mit dem Wert **0** überschrieben.

Mit der Eingabe **„M + nn“ bzw. „M - nn“** (nn beliebige reelle Zahl) wird **nn** **zum Inhalt von M addiert bzw. vom Inhalt von M subtrahiert, sofern der Inhalt von M eine Zahl ist.** Das Ergebnis wird wieder in **M** gespeichert.

Die in **"Eingabe"** und **"Ausgabe"** stehenden Daten können mit **"Protokolleintrag"** (**[ALT] + [K]**) in die Textdatei **"Protokoll.txt"** eingetragen werden, ohne dass die dort bereits gespeicherten Daten überschrieben werden. Man erhält auf diesem Wege eine Übersicht über alle bisher gespeicherten Daten, die auch nach Abschalten des Rechners nicht gelöscht werden, sofern kein PC-Wächter die Dateien schützt. Mit **"Protokollaufruf"**

[ALT] + [K] gelangt man in die Textdatei "**Protokoll.txt**". Man kann sie bei Bedarf ausdrucken (Befehlsschaltfläche "**Drucken**" **[ALT] + [D]**) oder in die Zwischenablage kopieren (Befehlsschaltfläche "**Zwischenablage**".**[ALT] + [Z]**).

Auch Teile des Inhalts der Textfelder "**Eingabe**" oder "**Ausgabe**" lassen sich nach deren Markierung in die Zwischenablage kopieren **[STRG] + [C]**).

Nach Betätigen der Befehlsschaltfläche "**OK**" (**[ALT] + [O]**) gelangt man wieder zurück zum Startformular "**Termevaluator**".

Umwandlung in ein anderes Zahlensystem (Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem)

Das Programm besitzt Konvertierungsfunktionen für Umwandlungen vom **Dezimalsystem** in das **Binärsystem**:
(BIN(a), Tastenkombination: **[STRG] + [F2]**),
 vom **Dezimalsystem** in das **Oktalsystem**:
OKT(a), Tastenkombination: **[STRG] + [F8]**,
 vom **Dezimalsystem** in das **Hexadezimalsystem**:
HEX(a), Tastenkombination: **[STRG] + [F6]**.

Die Umwandlung von einem dieser Zahlensysteme in das Dezimalsystem erfolgt über

INVBIN(a) Tastenkombination: **[UMSCHALT] + [STRG] + [F2]**,
INVOKT(a) Tastenkombination: **[UMSCHALT] + [STRG] + [F8]** und
INVHEX(a) Tastenkombination: **[UMSCHALT] + [STRG] + [F6]**.

Zahlen im **Binärsystem** erhalten die Kennung **"&B__"**, im **Oktalsystem** die Kennung **"&O__"** und im **Hexadezimalsystem** die Kennung **"&H__"**.

Beispiele:

Dezimalzahl: **1234**; Eingabe: **BIN(1234)**; Ausgabe: **&B10011010010**

Hexadezimalzahl: **&H78F**; Eingabe: **INVHEX(&H78F)**; Ausgabe: **1935**

Berechnungen in den genannten Zahlensystemen sind möglich durch die Tastenkombinationen: **[STRG] + [F2]**, **[STRG] + [F8]** und **[STRG] + [F6]**.

Weitere Beispiele findet man in Tab. 3. "Beispiele - Konvertierungen von einem Zahlensystem in ein anderes Zahlensystem" und Bild 8, Bild 9

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden in der Form " $a + bi$ " eingegeben; die Imaginäreinheit " i " ist unmittelbar an den Imaginärteil " b " zu schreiben. Die Auswertung eines Terms, der komplexe Zahlen enthält, erfolgt über **[STRG]+[K]** (Ausgabe in kartesischen Koordinaten) oder **[STRG]+[P]** (Ausgabe in Polarkoordinaten)

(Menü: "**Mathematische Funktionen / Komplexe Zahlen / Kartesische Koordinaten (Polarkoordinaten)**").

Alternativ hierzu kann dem Eingabeterm die Kennung "**KOM**" bzw. "**POL**" vorangestellt werden.

Beispiele findet man in Tab. 3. "**Beispiele - Rechnen mit komplexen Zahlen**" und Bild 7

Die komplexen Wurzeln einer Zahl $a + bi$ werden mit **[STRG]+[R]** (Menü: "**Mathematische Funktionen / Komplexe Zahlen / Kartesische Koordinaten**") ermittelt.

Berechnungen mit 26-stelliger Genauigkeit

Zur Auswertung von Termen auf eine Genauigkeit von 26 Stellen wird dem Eingabeterm die Kennung „**DEZ**“ vorangestellt mit (**Menü: "Mathematische Funktionen / Dezimal26"**). Auch die Eingabe kann Zahlen bis zu 26 Stellen enthalten. Diese Genauigkeit ist beschränkt auf die Grundrechenarten, die Potenz, die Quadratwurzel, die Kubikwurzel, die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen sowie auf die Exponentialfunktionen und Logarithmen.

Beispiele:

Eingabe: **"DEZ 0,25*(sqrt(5)-1)"**

Ausgabe: **"0,30901699437494742410229342"**

Eingabe: **"DEZ sin(PI/10)"**

Ausgabe: **"0,30901699437494742410229342"**

Bruchrechnung / Periodische Dezimalbrüche

Ein Term, der sich aus gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen zusammensetzt, wird als ein gewöhnlicher Bruch dargestellt.

Hierbei dürfen in dem Term nur die Grundrechenoperationen (Addition (+), Subtraktion (-), Multiplikation (*) und Division (/)) und zusätzlich Potenzen (b^a) auftreten. (In der Potenzschreibweise „ b^a “ ist „b“ die Basis und „a“ der Exponent.)

Als "Kennung" wird dem Term die Buchstabenfolge **"BR"** vorangestellt (**Tastenkombination [STRG] + [B]**).

Für die Darstellung eines Bruches verwendet man das Divisionszeichen "/" (Bsp. "234/7890"). Eine gemischte Zahl schreibt man als Summe:

"Ganzzahliger Anteil" + "Echter Bruch" (Bsp. „**31 (1/7)**“) Eingabe: "**BR 31 + 1/7**").

Ein gewöhnlicher Bruch oder Dezimalbruch, der im Nenner eines anderen Bruchs auftritt, ist in Klammern "(...)" zu setzen.

(Bsp.: "BR 3,4/(2/3) + 2/3/(7,5)") .

Beispiele:

Eingabe: "**BR 2/3 + 4/5**"

Ausgabe: **"22 / 15 = 1 + 7/15"**

Eingabe: "BR 2/3 - 4/5"

Ausgabe: "-2/15"

Eingabe: "BR 2/3 * 4/5"

Ausgabe: "8/15"

Eingabe: "BR 2/3 * 4,5"

Ausgabe: **"3"**

Eingabe: "BR 2/3 / (4/5)"

Ausgabe: "5/6"

Eingabe: "BR 2 / 3 / 4 / 5"

Ausgabe: "1/30"

Eingabe: **"BR 2/3 / (4,5)"**

Ausgabe: "4/27"

Eingabe: "BR 4/3 * 4/3"

Ausgabe: "16/9 = 1 + 7/9"

Weiteres Beispiel siehe Bild 6 !

Für Potenzen gelten folgende Regeln:

1.

Die Basis „b“ einer Potenz ist immer zu klammern „(b)^a“.

2.

Der Exponent „a“ muss eine natürliche Zahl (1, 2,...) sein.

Die Basis b kann eine ganze Zahl, ein Bruch, eine Dezimalzahl, eine weitere Potenz oder ein algebraischer Ausdruck sein, der sich aus diesen Zahlenarten zusammensetzt.

Beispiele:

Eingabe: "BR (2/3)^3"

Ausgabe: "8/27"

Eingabe: **“BR (2 + 3*4/7 – (1/7)^2)^2 - 14“**

Ausgabe: "-853/2401"

Auch periodische Dezimalbrüche können in die Rechnung einbezogen werden.

Folgende Regeln sind dabei zu beachten:

1.

Der periodische Dezimalbruch ist in eckige Klammern [...] zu setzen.

2.

Die ein- oder mehrstellige Periode ist mit dem Symbol „P“ zu kennzeichnen.

Beispiele:

1)

Reinperiodischer Dezimalbruch (mit der Periode „456“): „32,456456...“

Eingabe: „BR [32,P456]“

Ausgabe: „**10808/333 = 32 + 152/333**“

II)

Gemischtpperiodischer Dezimalbruch

(mit der Periode „2“ und der Vorperiode „567“): „0,567222222...“

Eingabe: „BR [0,567P2]“

Ausgabe: „1021/1800“

III)

Addition der beiden vorgenannten Dezimalbrüche:

Eingabe: „BR [32,P456] + [0,567P2]“

Ausgabe: „**2199377/66600 = 33 + 1577/66600**“

IV)

Multiplikation der vorgenannten Summe mit „3/7“:

Eingabe: „BR ([32,P456] + [0,567P2]) * 3/7“

Ausgabe: „**2199377/155400 = 14 + 23777/155400**“

Umgekehrt lassen sich Bruchterme (in der Eingabezeile ohne Kennung) mit **[ENTER]** zu einem Dezimalbruch auswerten.

Bei mehrstelligen Perioden ist der Einsatz des Unterprogramms (DEZ) für eine 26-stellige Ausgabe zu empfehlen.

Beispiel:

Eingabe: **“DEZ 4087/3300“**

Ausgabe: "1,2384848484848484848484848"

Prozentrechnung

Folgende sechs Aufgaben der Prozentrechnung werden ausgeführt:

1.

Berechnung des **Prozentwertes(PW)** aus vorgegebenem **Grundwert(GW)** und **Prozentsatz(PS)**

2.

Berechnung des **Prozentsatzes(PS)** aus vorgegebenem **Prozentwert(PW)** und **Grundwert(GW)**

3.

Berechnung des **Grundwertes(GW)** aus vorgegebenem **Prozentwert(PW)** und **Prozentsatz(PS)**

4.

Berechnung des **Grundwertes(GW)** aus vorgegebenem **vermehrten Grundwert(VW)** und **Prozentsatz(PS)**

5.

Berechnung des **vermehrten Grundwertes(VW)** aus vorgegebenem **Grundwert(GW)** und **Prozentsatz(PS)**

6.

Berechnung des **verminderten Grundwertes(MW)** aus vorgegebenem **Grundwert(GW)** und **Prozentsatz(PS)**

Zu 1:

Eingabe: „PW“ [ENTER]

Es erscheint: „GW| | * PS| |%“ [ENTER]

Beispiel: **Grundwert(GW) = 700 €; Prozentsatz(PS) = 3,5%**

Eingabe: „GW|700| * PS|3,5|%“ oder in Kurzfassung: „700 * 3,5%“

Ausgabe: „Prozentwert(PW): 24,5

Zu 2:

Eingabe: „PS“ [ENTER]

Es erscheint: „GW| | / PW| |%“ [ENTER]

Beispiel: **Grundwert(GW) = 800 €; Prozentwert(PW) = 50 €**

Eingabe: „PW|50| / GW|800|%“ oder in Kurzfassung: „50 / 800 %

Ausgabe: „Prozentsatz(PS): 6,25

Zu 3:

Eingabe: „GWPW“ [ENTER]

Es erscheint: „PW| | & PS| |%“

Beispiel: **Prozentwert(PW) = 403,24 €; Prozentsatz(PS) = 3,5%**

Eingabe: „PW|403,24| = PS|3,5|%“ oder in Kurzfassung: „403,24 = 3,5%“

Ausgabe: „Grundwert(GW): 11521,142857

Zu 4:

Eingabe: „GWVW“ [ENTER]

Es erscheint: „VW| | & PS| |%“

Beispiel: **Vermehrter Grundwert(VW) = 724,5 €; Prozentsatz(PS) = 3,5%**

© Dr. M. Sponheimer Bedienungsanleitung Termevaluator4.3 (15. 10. 2021)

Eingabe: „**VW|724,5| & PS|3,5|%**“ oder in Kurzfassung: „**724,5 & 3,5%**“
 Ausgabe: „**Grundwert(PW): 700**“

Zu 5:

Eingabe: „**VW**“

Es erscheint: „**GW| | + PS| |%**“

Beispiel: Grundwert(GW) = 900 €; Prozentsatz(PS) = 2,4%

Eingabe: „**GW|900| + PS|2,4|%**“ oder in Kurzfassung: „**900 + 2,4%**“

Ausgabe: „**Vermehrter Grundwert(VW): 921,6**“

Zu 6:

Eingabe: „**MW**“

Es erscheint: „**GW| | - PS| |%**“

Beispiel: Grundwert(GW) = 900 €; Prozentsatz(PS) = 2,4%

Eingabe: „**GW|900| - PS|2,4|%**“ oder in Kurzfassung: „**900 - 2,4%**“

Ausgabe: „**Verminderter Grundwert(MW): 878,4**“

Anmerkung:

Das Prozentzeichen „%“ ist in allen sechs Fällen (als Kennung) an das Ende des eingetragenen Terms zu setzen !

Polarkoordinaten/Kartesische Koordinaten

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

Mit der Kennung **POLAR** **[ENTER]** erhält man die Eingabemaske:

POLAR alpha = | r =

Bei der Eingabe des Polarwinkels alpha ist die Einstellung der Winkeleinheit (**DEG**, **RAD** oder **GRAD**) zu beachten.

Beispiel: **alpha = -23,4 DEG** und **r = 10**

Eingabe: **POLAR alpha = -23,4 | r = 10**

[ENTER]

Ausgabe: **x = 9,177546 | y = -3,971479**

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

Mit der Kennung **KART** **[ENTER]** erhält man die Eingabemaske:

KART x = | y =

Beispiel: **KART x = 9,177546 | y = -3,971479**

Eingabe:

[ENTER]

Ausgabe: **alpha = -23,400001 | r = 10**

Bei der Ausgabe des Polarwinkels alpha ist die Einstellung der Winkeleinheit (**DEG**, **RAD** oder **GRAD**) zu beachten.

Mittelwert / Standardabweichung

Für die Berechnung des Mittelwertes und der (empirischen) Standardabweichung einer Datenliste trägt man zuerst in das Fenster **"Eingabe"** die Kennung **"DATEN"** ([STRG] + [D]) ein.

Es folgen die Daten (Zahlenwerte), denen jeweils ein senkrechter Strich „|“ oder ein Semikolon „;“ unmittelbar folgen muss.

Nach [ENTER] werden Mittelwert und Standardabweichung mit maximal 4 Nachkommastellen ausgegeben.

Beispiele:

1.

Eingabe: **DATEN 16| 9| 5| 17| 0| 11|**

Ausgabe: **Mittelwert 9,6667 StandardAbw. 5,9348**

2.

Eingabe: **DATEN 2,12345 | 0|**

Ausgabe: **Mittelwert 1,0617 StandardAbw. 1,0617**

Zu Demonstrationszwecken kann die Eingabe mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators „automatisiert“ werden. Man schreibt die Anzahl (maximal 999) der einzugebenden Zahlen unmittelbar an die Kennung „DATEN“ (ohne Trennungszeichen) und erhält nach [ENTER] die Datenliste. Hierbei werden nur die ganzen Zahlen **0, 1, 2,...,20** verwendet.

Beispiel:

3.

Eingabe: **„DATEN 13| 15| 3| 16| 6| 20| 20| 1| 12| 4| 7| 14| 10| 1| 2|“**

[ENTER]

Ausgabe: **„Mittelwert 9,6 StandardAbw. 6,4477“**

Anmerkungen:

1.

Für den Fall, dass in einer Datenreihe ein Wert mehrmals auftritt, kann eine abkürzende Schreibweise verwendet werden.

Beispiel: Für **„DATEN 13| 15| 3| 3| 3| 3| 16| 6|“**

schreibt man

„DATEN 13| 15|53| 16| 6|“**

2.

Einträge in Form von arithmetischen Termen sind zulässig.

Beispiel: **„DATEN 13,1| (1-3/4)^2| 3/(4,8)|“**

3.

Für den Fall, dass bei einer Datenreihe ein Wert fehlt, jedoch der Mittelwert(**MW**) vorliegt, kann der fehlende Wert nachträglich berechnet werden.

Beispiel:

Eingabe: **„DATEN MW10|| 13| 15| 3| 16| 6| 20| 20| 1| 12| 4| 7| 14| 10| 1| 2|“**

[ENTER]

Eingabe: „**DATEN** 16| 13| 15| 3| 16| 6| 20| 20| 1| 12| 4| 7| 14| 10| 1| 2|“
[ENTER]

Ausgabe: **Mittelwert 10 StandardAbw. 6,4323**

Die obigen Berechnungen der Standardabweichung setzen voraus, dass die Datenliste aus den Daten aller Merkmalsträger der Grundgesamtheit besteht .

Man erhält einen Schätzwert für die Standardabweichung einer Grundgesamtheit aus einer zufällig ausgewählten Stichprobe, wenn der Datenliste der Stichprobe die Kennung: „**DATENS**“ vorausgeht.

Beispiel:

4.

Eingabe: „**DATENS** 13| 15| 3| 16| 6| 20| 20| 1| 12| 4| 7| 14| 10| 1| 2|“
[ENTER]

Ausgabe: „**Mittelwert 9,6 StandardAbw.(S) 6,674**“

Korrelationskoeffizient / Ausgleichs(Regressions)gerade

Vor der Berechnung des Korrelationskoeffizienten und der Koeffizienten der Geradengleichung ist die Eingabe von Daten- bzw. Koordinatenpaaren erforderlich:

Nach Eintrag der Kennung „**Ax**“ und **[ENTER]** erscheint im Textfenster „Eingabe“: „**Ax y x y**“. Man trägt hinter dem Symbol „**x**“ die **x-Koordinate**, hinter dem Symbol „**y**“ die **y-Koordinate** ein und setzt die Zeichenfolge entsprechend fort.

Beispiel: „**Ax1 y5 x2 y12 x3 y16 x4 y21 x5 y32 x6 y39 x7 y43**“

Nach **[ENTER]** erscheinen im Formblatt "Funktionsgraph" -Textfeld **g(x)** die Zeichenfolge "**P(a|b) (c|d) (|)**",

im Beispiel: „**P(1|5)(2|12)(3|16)(4|21)(5|32)(6|39)(7|43)**“

und in einem **gesonderten Textfeld** die **Gleichung der Ausgleichsgeraden und der Korrelationskoeffizient**,

im Beispiel:

„**Ausgleichsgerade: $y = 6,571429 \cdot x - 2,285714$ Korrel.koeff.: 0,992292**“

Nach zweimaligem **[ENTER]** werden jetzt die **entsprechende Punktfolge und die Ausgleichsgerade** – zeitverzögert - gezeichnet.

Ersetzt man im Textfenster „**g(x)**“ den Anfangsbuchstaben „**P**“ durch „**G**“, werden nach **[ENTER]** die Punkte miteinander in einem Polygonzug verbunden.

(Bild 21 und Bild 22).

Anmerkung:

Mit der Kennung „**Axm**“ oder „**Axmn**“ – wobei „m“ und „n“ Ziffern sind - können nach **[ENTER]** m bzw. (10*m+n) Wertepaare mit Hilfe des Zufallszahlengenerators erzeugt werden.

Beispiel:

Eingabe: „**Ax5**“

[ENTER]

Eingabe: **A x4 y11,21 x8 y22,65 x12 y24,58 x16 y34,78 x20 y47,93**

[ENTER]

Formblatt:

„**Ausgleichsgerade/Korrelationskoeffizient**“:

„**Ausgleichsgerade: $y = 2,13925 \cdot x + 2,559$** “

„**KorrelationsKoeffizient: 0,978258**“

Lineare und nichtlineare Regression

Bei vielen Versuchen und statistischen Untersuchungen werden an den gemessenen Objekten gleichzeitig mehrere Merkmale X, Y, Z usw. erfasst. Häufig beschreibt man die Merkmalsausprägungen durch Zahlenwerte x, y, z usw.

Beispiele:

Bremsversuche von Fahrzeugen:

Geschwindigkeit X und Länge des Bremsweges Y

Fallversuche:

Fallhöhe X und Fallzeit Y

Umfrage auf Bauernhöfen:

Größe der bewirtschafteten Fläche X, Anzahl der gehaltenen Milchkühe Y und erzielttes Jahreseinkommen Z.

Im Folgenden werden nur Versuche mit 2 Merkmalen X und Y betrachtet. Die bei einem Versuch auftretenden Zahlenpaare (x|y) stellt man in einem x-y-Koordinatensystem als Punkte dar.

Wenn der Versuch mehrmals wiederholt wird, entsteht eine Abfolge/Menge von Punkten, aus deren Lage man unter gewissen Voraussetzungen auf einen bestimmten mathematischen Zusammenhang (Funktionstyp) zwischen X und Y schließen kann. Es ist klar, dass der Graph dieser Funktion sich möglichst „gut“ der Punktmenge anpassen soll.

Als Maß für die „Güte“ dieser Anpassung wird der mittlere Fehler genommen. Man berechnet den mittleren Fehler aus den Quadraten der Abweichungen, die die einzelnen Punkte zum Funktionsgraphen haben. Die Funktion mit dem kleinsten mittleren Fehler wird häufig als KQ-Funktion bezeichnet. (KQ steht als Abkürzung für „Kleinste Quadratsumme“)

Näheres hierzu in jedem Lehrbuch der Statistik!

Wir bezeichnen im Folgenden derartige Funktionen als „Regressionsfunktionen“.

Das Programm berechnet nach Vorgabe der Datenpaare (x|y) (x|y) (x|y)..... und des Regressionstyps - den der Nutzer festlegen muss – die Parameter der Regressionsfunktion.

Folgende Regressionstypen werden behandelt:

Lineare Funktion

Quadratisches Polynom

Kubisches Polynom

Regressionspolynome vom Grad $n > 3$

Allgemeine Potenzfunktion

Allgemeine Exponentialfunktion

Logistische Funktion

Logistische Funktion mit vorgegebener (kleinster) oberer Schranke K

Die Eingabezeile hat dann folgenden Aufbau:

REG TYP... x..y..x..y..x..y..

REG ist die Kennnung für diesen Programmteil. Hinter der Bezeichnung **TYP** sind Regressionstyp und anschließend die Wertepaare **x..y..x..y....** usw. einzutragen.

Allen Beispielen liegt die folgende Liste von Datenpaaren zugrunde, um die Anpassungsgüte der verschiedenen Regressionstypen vergleichen zu können:

(1 | 0,38), (2 | 1,15), (3 | 2,71), (4 | 3,92), (5 | 5,93), (6 | 8,56),
(7 | 11,24)

Die Regressionstypen im Einzelnen:

Lineare Funktion:

Funktionsgleichung: $y = m \cdot x + b$

Kennzeichnung: **LIN**

Zu berechnen sind die Parameter **m** und **b**.

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **LIN** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

„Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die Koeffizienten des Regressionspolynoms 1. Grades:

$p(x) = m \cdot x + b$ berechnet:

$m = 1,807857$

$b = -2,39$

$f(x) = (1,807857) \cdot x + (-2,39)$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,693208“

Fügt man hinter der Eingabezeile „REG.....“ das Symbol „G“ an, werden die den Koordinatenpaaren zugeordneten Punkte und der Graph des Regressionspolynoms gezeichnet.

In unserem Beispiel ist in das Fenster „Eingabe“ einzutragen:

REG TYP **LIN** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Quadratisches Polynom:

Funktionsgleichung: $y = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + a_{(2)} \cdot x^2$

Kennzeichnung: **QUAD**

Zu berechnen sind die Parameter **a₍₀₎**, **a₍₁₎** und **a₍₂₎**

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **QUAD** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

© Dr. M. Sponheimer Bedienungsanleitung Termevaluator4.3 (15. 10. 2021)

werden die Koeffizienten des Regressionspolynoms 2. Grades:

$$p(x) = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + a_{(2)} \cdot x^2$$

berechnet:

$$a_{(0)} = -0,032857$$

$$a_{(1)} = 0,236429$$

$$a_{(2)} = 0,196429$$

$$f(x) = (-0,032857) + (0,236429) \cdot x + (0,196429) \cdot x^2$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,132388

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **QUAD** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Kubisches Polynom:

Funktionsgleichung: $y = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + a_{(2)} \cdot x^2 + a_{(3)} \cdot x^3$

Kennzeichnung: **CUB**

Zu berechnen sind die Parameter **a₍₀₎**, **a₍₁₎**, **a₍₂₎** und **a₍₃₎**

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **CUB** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

„Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die Koeffizienten des Regressionspolynoms 3. Grades:

$$p(x) = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + \dots + a_{(3)} \cdot x^3$$

berechnet:

$$a_{(0)} = -0,262857$$

$$a_{(1)} = 0,498373$$

$$a_{(2)} = 0,119762$$

$$a_{(3)} = 0,006389$$

$$f(x) = (-0,262857) + (0,498373) \cdot x + (0,119762) \cdot x^2 + (0,006389) \cdot x^3$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,127542“

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **CUB** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Regressionspolynome vom Grad n > 3:

Regressionspolynome vom Grad n > 3 werden bestimmt, indem man die Gradzahl n hinter der Bezeichnung **TYP** einfügt.

Beispiel:

Bestimmung des Regressionspolynoms vom Grad 5:

Eingabe:

REG **TYP 5** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe

„Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die Koeffizienten des Regressionspolynoms 5. Grades:

$$p(x) = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + \dots + a_{(5)} \cdot x^5$$

berechnet:

$$a_{(0)} = 3,541429$$

$$a_{(1)} = -7,174591$$

$$a_{(2)} = 5,392083$$

$$a_{(3)} = -1,592424$$

$$a_{(4)} = 0,219735$$

$$a_{(5)} = -0,011167$$

$$f(x) = (3,541429) + (-7,174591) \cdot x + (5,392083) \cdot x^2 + (-1,592424) \cdot x^3 + (0,219735) \cdot x^4 + (-0,011167) \cdot x^5$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,0567“

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **5** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Allgemeine Potenzfunktion:

Funktionsgleichung: **$y = a \cdot x^b$** (Bedingung: **$x > 0, y > 0$**)

Kennzeichnung: **POT**

Zu berechnen sind die Parameter **a** und **b**.

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **POT** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die Parameter a und b der RegressionsPotenzfunktion:

$$f(x) = a \cdot x^b$$

berechnet:

$$a = 0,332084$$

$$b = 1,80855$$

$$f(x) = 0,332084 \cdot x^{(1,80855)}$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,144046

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **POT** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Allgemeine Exponentialfunktion:

Funktionsgleichung: **$y = a \cdot b^x$** (Bedingung: **$y > 0$**)

© Dr. M. Sponheimer Bedienungsanleitung Termevaluator4.3 (15. 10. 2021)

Kennzeichnung: **EXP**

Zu berechnen sind die Parameter **a und b**

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **EXP** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die Parameter a und b der RegressionsExponentialfunktion:

$$f(x) = a * b^x$$

berechnet:

$$a = 0,837988$$

$$b = 1,457249$$

$$f(x) = 0,837988 * 1,457249^x$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,508374“

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **EXP** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Logistische Funktion:

Funktionsgleichung: **y = K / (1 + exp(a + b*x))** (Bedingung: y > 0)

Kennzeichnung: **LOGIST**

Zu berechnen sind die Parameter **K, a und b**

Beispiel:

Eingabe:

REG TYP **LOGIST** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24

[ENTER]

Ausgabe:

Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden die obere Schranke K und die Parameter a, b

der logistischen (Regressions)Funktion:

$$f(x) = K / (1 + \exp(a + b*x))$$

berechnet:

$$K = 17,056$$

$$a = 3,724$$

$$b = -0,624$$

$$f(x) = 17,056 / (1 + \exp(3,724 + (-0,624)*x))$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,218

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REG TYP **LOGIST** x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24 **G**

Die Suche nach einer logistischen Regressionsfunktion kann längere Zeit beanspruchen und u.U. auch erfolglos sein. Dann erscheint in der Ausgabe ein Hinweis.

Beispiel:

Eingabe:

```
reg logist x1y420x2y490x3y530x4y520x5y600x6y630x7y700x8y680x9y720
x10y810 x11y850x12y920x13y990x14y1020x15y1200
```

[ENTER]

Ausgabe:

„Zu den Wertepaaren:

(1|420) (2|490) (3|530) (4|520) (5|600) (6|630) (7|700) (8|680) (9|720)
(10|810) (11|850) (12|920) (13|990) (14|1020) (15|1200)

werden die obere Schranke K und die Parameter a, b
der logistischen (Regressions)Funktion:

$$f(x) = K / (1 + \exp(a + b \cdot x))$$

berechnet:

$$K = 8579,82$$

$$a = 3,001$$

$$b = -0,075$$

$$f(x) = 8579,82 / (1 + \exp(3,001 + (-0,075) \cdot x))$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte
(senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 29,64

Eine weitere Erhöhung der oberen Schranke hätte nur eine geringfügige Verminderung des mittleren Abstandes zur Folge; daher wurde der Programmablauf unterbrochen!“

Logistische Funktion mit vorgegebener (kleinster) oberer Schranke K:

In manchen Fällen ist die (kleinste) obere Schranke K bereits (annähernd) bekannt; damit verkürzt sich die Arbeitszeit für die Berechnung der übrigen Parameter a und b.

Der vorgegebene Parameter K ist als Zusatz in die Eingabezeile hinter der Kennung LOGIST einzutragen.

Funktionsgleichung: $y = K / (1 + \exp(a + b \cdot x))$ (Bedingung: $y > 0$)

Kennzeichnung: **LOGIST...**

Zu berechnen sind die Parameter **a und b**

Beispiel:

Vorgegeben ist die Schranke K = 14

Eingabe:

```
REGTYPLOGIST14x1y0.38x2y1.15x3y2.71x4y3.92x5y5.93x6y8.56x7y11.24
```

Ausgabe:

Zu den Wertepaaren:

(1|0.38) (2|1.15) (3|2.71) (4|3.92) (5|5.93) (6|8.56) (7|11.24)

werden bei vorgegebener oberer Schranke K = 14 die Parameter a und b
der logistischen (Regressions)Funktion:

$$f(x) = K / (1 + \exp(a + b \cdot x))$$

berechnet:

$$a = 3,849$$

$$b = -0,727$$

$$f(x) = 14 / (1 + \exp(3,849 + (-0,727) \cdot x))$$

Der mittlere Abstand der durch die Wertepaare festgelegten Punkte (senkrecht) zur Regressionskurve beträgt: 0,286

Für die Erstellung einer Graphik ist einzutragen:

REGTYP**LOGIST**14x1y0,38x2y1,15x3y2,71x4y3,92x5y5,93x6y8,56x7y11,24**G**

Anmerkungen:**1.**

Das Raster **REG TYP... x..y..x..y..x..y..** kann durch Eingabe von **REG** und nachträgliches **[ENTER]** erzeugt werden.

2.

Die Eingabe der Bezeichnung **TYP** ist entbehrlich.

REG TYP... x..y..x..y..x..y.. ist also gleichbedeutend mit **REG ... x..y..x..y..x..y..**

3.

Für die Bestimmung einer linearen Regressionsfunktion kann die Eingabe der Bezeichnung **LIN** entfallen.

REG TYP LIN x..y..x..y..x..y.. ist also gleichbedeutend mit **REG x..y..x..y..x..y..**

4.

Wenn die vorgegebene Schranke K zu klein ist, wird ein geeigneter anderer Wert für K während des Programmablaufs berechnet.

Quantile (Inverse Verteilungsfunktion) für die Standardnormalverteilung

Eine Zahl x_p mit der Eigenschaft, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p in dem Intervall $(-\infty \dots x_p]$ liegt, heißt **Quantil**.

Die durch diese Zuordnung definierte Funktion wird auch als „inverse Verteilungsfunktion“ bezeichnet.

Man berechnet Quantile durch die Eingabe : „**Quantil(p)**“.

Beispiel:

p = 0,95

Eingabe: „**Quantil(0,95)**“

Ausgabe: „**Quantil $x_p = 1,6449$ | $P(x \leq x_p) = 0,95$** “

In bestimmten Fällen sind **zwei Grenzen x_p und $-x_p$** so zu bestimmen, dass die Zufallsvariable X mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p in dem Intervall $[-x_p \dots x_p]$ liegt.

Man berechnet die Grenzen durch die Eingabe : „**Quantilbs(p)**“

Beispiel:

p = 0,95

Eingabe: „**Quantilbs(0,95)**“

Ausgabe: „ **$x_p = +/-1,96$ | $P(-x_p \leq x \leq x_p) = 0,95$** “

Der berechnete Wert (**Quantil(0,95)=1,6449 bzw. Quantilbs(0,95)=+/-1,96**) wird gespeichert und kann in weiteren Rechnungen mit Befehlsschaltfeld „RCL“ oder der Tastenkombination [ALT]+[2] eingefügt werden.

Die Durchführung im Einzelnen an dem Beispiel: „**3,1*Quantil(0,95)+6,7**“

1. Eingabe: „**Quantil(0,95)**“ [ENTER]
Ausgabe: „**Quantil $x_p = 1,6449$ | $P(x \leq x_p) = 0,95$** “
Zusätzlich wird der Wert $x_p = 1,6449$ abgespeichert!
Tastenkombination [ALT] +[L]
(Inhalt des Eingabefeldes wird gelöscht.)
2. Eingabe: „**3,1***“
3. Tastenkombination [ALT]+[2]
(Der Speicherinhalt wird auf Cursorposition kopiert.)
4. Eingabe (erweitert um „**+6,7**“): „**3,1*1,6449+6,7**“ [ENTER]
Ausgabe: **11,79919**

Quantile lassen sich auch für beliebige Normalverteilungen (mit Mittelwert m und Standardabweichung s) berechnen.

Siehe hierzu den folgenden Abschnitt: „Die zur Normalverteilung $CNorm(x|m|s)$ inverse Funktion $ICNorm(p|m|s)$ “

Anmerkungen:**1.**

Quantil(p) und **Quantilbs(p)** zählen nicht zu den Basisfunktionen wie z.B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$..., die auch in zusammengesetzten Rechnungen verwendet werden können.

Quantil(p) und **Quantilbs(p)** können daher nur „separat“ (s. Beispiele oben) ausgewertet werden.

2.

Die Berechnung einer Zahl **x_p** mit der Eigenschaft, dass **eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p in dem Intervall [x_p...unendlich] liegt**, führt man auf die Berechnung eines Quantils zurück, indem man die vorgegebene Wahrscheinlichkeit **p** durch die Wahrscheinlichkeit **p* = 1 – p** ersetzt.

Beispiel:

p = 0,92

p* = 1 – p = 0,08

Eingabe: „**Quantil(0,08)**“

Ausgabe: „**Quantil x_p = -1,4051 | P(x <= x_p) = 0,08**“

Hier ist die rechts stehende Ungleichung zu ersetzen durch:

„P(x >= x_p) = 0,92“.

3.

Mit dem Zusatz des Symbols „R“ erhöht man die Genauigkeit auf 8 Nachkommastellen.

Beispiel:

Eingabe: **Quantil(0,91)**

Ausgabe: **Quantil x_p = 1,3408 | P(x <= x_p) = 0,91**

Eingabe: **Quantil(0,91)R**

Ausgabe: **Quantil x_p = 1,34075503 | P(x <= x_p) = 0,91**

Die zur Normalverteilung **CNorm(x|m|s)** inverse Funktion **ICNorm(p|m|s)**

Für die Berechnung von Quantilen von Normalverteilungen **CNorm(x|m|s)** mit **Mittelwert m** und **Standardabweichung s** verwendet man die inverse Funktion **ICNorm(p|m|s)**.

Beispiel: **p = 0,95; m=3,1; s=0,55**

Eingabe: **ICNorm(0,95|3,1|0,55)**

Ausgabe: **4,0047**

Anmerkungen:

1.

ICNorm(p|m|s) zählt nicht zu den Basisfunktionen wie z.B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$..., die auch in zusammengesetzten Rechnungen verwendet werden können.

x_p = ICNorm(p|m|s) muss in solchen Fällen (mit Tastenkombination **[ALT]+[1]**) zuvor abgespeichert und anschließend (mit Tastenkombination **[ALT]+[2]**) in die Rechnung eingefügt werden.

2.

Mit „**ICNorm**“ und **[ENTER]** kann die Vorlage „**ICNorm(p= |m= |s=)**“ (**p=Wahrscheinlichkeit, m=Mittelwert(Erwartungswert), s= Standardabweichung**) geladen werden.

3.

Mit dem Zusatz des Symbols „**R**“ erhöht man die Genauigkeit auf **8 Nachkommastellen**.

Beispiel:

Eingabe: **ICNorm(0,8|-3|5)**

Ausgabe: **1,2081**

Eingabe: **ICNorm(0,8|-3|5)R**

Ausgabe: **1,20810615**

Funktionsauswertung

Nach dem Aufruf der Befehlsschaltfläche **"Funktionsauswertung"** ([F1]) schaltet der **"Termevaluator"** in das Formular **"Funktionsauswertung"** um. Nach Eingabe eines Funktionsterms und eines Wertes für x wird der Termwert berechnet und im Formular **"Termauswertung"** ausgegeben. Diese Berechnung kann beliebig oft wiederholt werden (Befehlsschaltfläche **"OK"**).

Eine Fehlermeldung erfolgt, wenn neben der Variablen „x“ eine weitere Variable im Funktionsterm (z.B.: „sin(x)*y“) vorkommt!

Beispiele findet man unter Bild 2, Bild 3, Bild 4 und Bild 5 !

Zurück in das Hauptmenü „Termevaluator4.3“ gelangt man durch Anklicken des Befehlsfeldes „Zurück“ ([ALT] + [Z])!

Bei Bedarf lassen sich Eingabe (Funktionsterm) und Ausgabe (Funktionswert) in der Textdatei **"protokoll.txt"** nach Aufrufen der Befehlsschaltfläche **"Protokolleintrag"** speichern. Die in der Textdatei **"protokoll.txt"** gespeicherte Funktionswertetabelle bleibt auch nach Abschalten des Betriebssystems Windows erhalten, sofern kein PC-Wächter die Dateien schützt.

Nachtrag:

Die Eingabe von **komplexwertigen Argumenten** und **Funktionstermen** ist jetzt möglich. **In diesen Fällen muss dem Funktionsterm die Kennung „KOMPLEX“ vorausgehen.**

Beispiel 1 (komplexwertiges Argument):

Term: "KOMPLEX x^2"

x-Wert: "3+4i"

Auswertung: (-7+24i)

Beispiel 2 (komplexwertiger Funktionsterm):

Term: "KOMPLEX sin(x^2+4i)"

x-Wert: "3,456"

Auswertung: KOMPLEX sin(x^2+4i)

Beispiel 3 (komplexwertiges Argument und komplexw. Funktionsterm):

Term: "KOMPLEX (x^2+4,12*i)^3"

x-Wert: "1 + i"

Auswertung: "(-15.921107+22.172006i)"

Funktionswertetabelle

Mit Hilfe des Moduls **Funktionswertetabelle** wird eine Wertetabelle für eine Funktion f aufgestellt.

Das Argument x nimmt zuerst den Wert a an und wächst dann stufenweise an, bis es den Wert b überschreitet. Nach der Kennung **"FUN"** sind die drei Parameter Anfangswert a , Endwert b und Zuwachs **step** h einzutragen; es folgt der Funktionsterm $f(x)$ (**"FUN a| b|step h| f(x)"**) Tastaturcode:

[STRG] + [F].

(Anstelle des Trennungszeichens "|" kann ein Semikolon ";" geschrieben werden.)

Beispiel:

Es wird eine Wertetabelle für die Funktion $f: f(x) = x^7$ im Intervall $[-2..2]$ erstellt. Das Argument soll stufenweise um 0,5 anwachsen.

Eingabe: **"FUN -2| 2|step 0,5| x^7"**

Die Ausgabe erfolgt auf einem gesonderten Formblatt:

Funktionswertetabelle

Funktion $f: f(x) = x^7$

x	$f(x)$
-2	-128
-1,5	-17,085938
-1	-1
-0,5	-0,007812
0	0
0,5	0,007812
1	1
1,5	17,085938
2	128

Anmerkungen:

1.

Der Eintrag **"step"** ist nicht erforderlich; er dient lediglich der Orientierung !
Es gilt also: "FUN a| b| step h| f(x)" = "FUN a| b| h| f(x)".

2.

Für den Fall, dass der Zuwachs $h = 1$ beträgt, ist der **Eintrag** für h nicht erforderlich.

Es gilt also: FUN a| b| 1| f(x) = FUN a| b| f(x).

3.

Für ein zügiges Vorlesen der gesamten Funktionswertetabelle sollte die Anzahl der Nachkommastellen auf $n=3$ oder $n=4$ reduziert werden (**[ALT] + [S] und anschließend [n]**).

4.

Die Ausgabe erfolgt in der (nichtproportionalen) Schriftart "COURIER". Damit ist gewährleistet, dass alle Argumentwerte **"x"** und Funktionswerte **"f(x)"** in übersichtlicher Form untereinander stehen. Wenn die Tabelle in ein WORD-

Dokument eingefügt werden soll, ist es empfehlenswert, sie in dieser (oder einer anderen nichtproportionalen) Schriftart darzustellen.

Parallel zur Aufstellung der Funktionswertetabelle werden die Wertepaare $(x_1 | f(x_1))$, $(x_2 | f(x_2))$,.....

als Zeichenkette in der Form

P x x_1 y f(x_1), P x x_1 y f(x_1),.....

abgespeichert. Mit **[ALT] + [2]** kopiert man die Zeichenkette in das Textfenster „Eingabe“. Damit ist es möglich, die Wertepaare als Punkte zu visualisieren (s. hierzu Abschnitt „**Koordinateneingabe**“).

Anmerkung:

Die Funktionswertetabellen der Standardnormalverteilung **CNorm(x|0|1)** und deren Dichte („Gaußsche Glockenkurve“) **D(x|0|1)** können direkt mit den Einträgen **CNorm [ENTER] bzw. DNorm(x|0|1) [ENTER]** aufgerufen werden.

Befehlsschaltfläche "Zwischenablage" ([ALT] + [Z]):

speichert den Text in die Zwischenablage.

Befehlsschaltfläche "OK" ([ALT] + [O] oder [ENTER]):

löscht das Textformular und blendet das Hauptformular "Termevaluator4.3" ein.

Funktionswertetabellen für spezielle Funktionen - Kurzbefehle -

Mit den folgenden Kurzbefehlen werden die Eingangszeilen für den Aufruf von Funktionswertetabellen erstellt. Die vorgegebenen Begrenzungswerte für die Festlegung des Definitionsbereichs **a| b|** und die Schrittweite **step c|** können dann noch geändert werden.

Funktion	Kurzbefehl(in „Eingabe“ eintragen)
Standardnormalverteilung	„CNORM“
Dichte der Standardnormalverteilung (Glockenkurve)	„DNORM“
Exponentialfunktion zur Basis „e“	„EXP“
Exponentialfunktion zur Basis „10“	„EXP10“
Logarithmus zur Basis „e“	„LN“
Logarithmus zur Basis „10“	„LG“

Funktions- / Kurvenschar

Wenn eine Funktionsgleichung neben der Gleichungsvariablen x einen Parameter (eine Formvariable) - im Folgenden mit „ c “ bezeichnet - enthält, so spricht man von einer Funktions- oder Kurvenschar.

Das Programm plottet zu einzelnen Parameterwerten c aus dem Intervall $[ca...cb]$ die zugehörigen Kurven; dabei wird der Definitionsbereich $[xa...xb]$ vorgegeben.

Nach Eintrag der Kennung „**SCHAR**“ und [ENTER] erscheint im Textfeld „Eingabe“: „**SCHAR xa -5 |xb 5 |ca -4 |cb 4 |step 2 |f(x)=**“

Die Vorgaben für die Randwerte des Definitionsbereiches: $xa = -5$ und $xb = 5$, des Parameterbereiches: **ca = -4** und **cb = 4** und des Parameterzuwachses: **step = 2** können jetzt nach Bedarf geändert werden. Außerdem ist die (parametrisierte) Funktionsgleichung (z. B. „ $c \cdot x^2 + c$ “) einzutragen.

In dem Textfenster „Eingabe“ muss dann stehen:

„**SCHAR xa -5 |xb 5 |ca -4 |cb 4 |step 2 |f(x)= $c \cdot x^2 + c$** “

Nach [ENTER] werden die Graphen der Funktionen f mit den Gleichungen:

$f(x) = -4 \cdot x^2 - 4$, $f(x) = -2 \cdot x^2 - 2$,
 $f(x) = 0$, $f(x) = 2 \cdot x^2 + 2$ und $f(x) = 4 \cdot x^2 + 4$

ausgegeben.

Zum Plotten der Graphen werden ohne weitere Angaben für jeden Graphen 80 Punkte eingezeichnet, die miteinander geradlinig verbunden werden.

Liegen diese Punkte sehr dicht beieinander, so entsteht der visuelle Eindruck einer durchgezogenen Linie.

Außerdem kann man durch Angabe einer Zahl (z.B. 150) die Anzahl der zu zeichnenden Punkte steuern:

„**SCHAR 150 xa-3|xb3|ca-4|cb4|step2|f(x)= $c \cdot x^2 + c$** “

[s. Bild 54](#)

Die Kurvenschar (z.B.: „ $f(x) = x^2 \cdot (x-c)$ “) kann nachträglich durch eine weitere Kurve ergänzt werden, deren Term (z. B.: $-0,5 \cdot x^3$) in das Textfenster „**f(x)**“ einzutragen ist:

„**SCHAR 120 xa-1|xb5|ca-4|cb4|step1|f(x)= $x^2 \cdot (x-c)$** “

[s. Bild 55](#)

Die Anzahl der einzuzeichnenden Kurven und damit die Bearbeitungszeit hängen von der Länge des Parameterintervalls **[ca...cb]** und dem Parameterzuwachs **step** ab.

Die durch das Programm erstellte Graphik kann bearbeitet werden (z.B. durch Verändern der Intervallgrenzen „**x-links**“, „**x-rechts**“, „**y-oben**“, „**y-unten**“.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Eine abschnittsweise definierte Funktion setzt sich aus mehreren Funktionstermen zusammen, wobei die unterschiedlichen Terme unterschiedliche Definitionsbereiche haben müssen.

Dies wird an folgendem Beispiel erläutert:

Eine Funktion ist

im Intervall **minus unendlich** $< x < -2$ durch den Term **$f(x) = 0$**

im Intervall **$-2 \leq x < 1$** durch den Term **$f(x) = -2x - 1$**

im Intervall **$1 \leq x < \text{unendlich}$** durch den Term **$f(x) = 5(x-2)^2 - 8$** definiert.

Die Terme werden durch den Ausdruck

$(-2 \leq x < 1) * (-2 * x - 1) + (1 \leq x) * (5 * (x-2)^2 - 8)$ kombiniert.

(Die Terme " $(-2 \leq x < 1)$ " bzw. " $(1 \leq x)$ " sind Aussageformen, die in Abhängigkeit von x wahr (Wert **1**) oder falsch (Wert **0**) sind.)

Für die **Erstellung einer Wertetabelle** werden die Kennung "**FUN**", die **Intervallgrenzen a | b** und der **Zuwachs h** hinzugefügt

(siehe hierzu Kapitel "Funktionswertetabelle" !):

FUN -3,5| 4|0,5| $(-2 \leq x < 1) * (-2 * x - 1) + (1 \leq x) * (5 * (x-2)^2 - 8)$

Nach Eintrag in Textfenster "Eingabe" und **[ENTER]** erhält man:

Funktionswertetabelle

Funktion f: $f(x) = (-2 \leq x < 1) * (-2 * x - 1) + (1 \leq x) * (5 * (x-2)^2 - 8)$

x	f(x)
-3,5	0
-3	0
-2,5	0
-2	3
-1,5	2
-1	1
-0,5	0
0	-1
0,5	-2
1	-3
1,5	-6,75
2	-8
2,5	-6,75
3	-3
3,5	3,25
4	12

Siehe auch **Bild 42** !

Polynominterpolation

Für **n** gegebene Werte-/Koordinatenpaare (x_i, y_i) mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i wird ein **Polynom P maximal (n-1)-ten Grades** mit der Funktionsgleichung $y = p(x)$ gesucht, das alle Gleichungen: $p(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ erfüllt. Ein solches Polynom existiert stets und ist eindeutig bestimmt. Das Programm berechnet die Polynomkoeffizienten.

Vor der Berechnung der Polynomkoeffizienten ist die Eingabe von **n** Werte-/Koordinatenpaaren ($2 \leq n \leq 9$) erforderlich.

Nach Eintrag der Kennung „**POLY**“ und **[ENTER]** erscheint im Textfenster „Eingabe“ die Zeichenfolge: „**Poly x y x y x y**“. Man trägt hinter dem Symbol „**x**“ die **x-Koordinate**, hinter dem Symbol „**y**“ die **y-Koordinate** ein und setzt die Zeichenfolge entsprechend fort.

Beispiel(mit 7 Wertepaaren):

„**POLY x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x0 y-1 x1 y-5x 2y11 x3 y-3**“

Nach **[ENTER]** erscheint im Formblatt „**Polynominterpolation**“:

„**Zu den Wertepaaren**

(-3 | 1)

(-2 | -1)

(-1 | 11)

(0 | -1)

(1 | -5)

(2 | 11)

(3 | -3)

werden die Koeffizienten des Interpolationspolynoms

$p(x) = a_{(0)} + a_{(1)} \cdot x + \dots + a_{(6)} \cdot x^6$ **berechnet:**

$a_{(0)} = -1$

$a_{(1)} = -13,866667$

$a_{(2)} = 5,1$

$a_{(3)} = 6,416667$

$a_{(4)} = -1,166667$

$a_{(5)} = -0,55$

$a_{(6)} = 0,066667$

Fügt man hinter der Kennung „**POLY**“ die **Zeichenkette „xx kk“** - wobei **kk** eine (Dezimal)Zahl ist - ein, wird zusätzlich der Funktionswert $p(kk)$ berechnet.

In unserem Beispiel ist für $kk = 2,5$ in das Fenster „Eingabe“ einzutragen:

„**POLY xx2,5 x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x0 y-1 x1 y-5x 2y11 x3 y-3**“

(s. hierzu [Bild 52](#)).

Fügt man hinter der Kennung „**POLY**“ den **Buchstaben „P“** ein, werden die den Koordinatenpaaren zugeordneten Punkte und der Graph der Polynomfunktion **P** gezeichnet.

In unserem Beispiel ist in das Fenster „Eingabe“ einzutragen:

„**POLY P x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x0 y-1 x1 y-5x 2y11 x3 y-3**“

(s. hierzu [Bild 53](#)).

Anmerkung:

Mit der Kennung „**POLY m**“– wobei „m“ eine Ziffer ist - werden mit **[ENTER]** m Wertepaare mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugt.

Beispiel:

Eingabe: „**POLY 5**“

[ENTER]

Eingabe: „**POLY x-3y7x-2y6x-1y1x0y9x1y-1**“–

Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren

Für die „Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren“ (kurz: „Faktorisierung von Polynomen“) gibt man die Kennung **„ALG Z“** und anschließend den Polynomterm ein:

1. Beispiel:

Eingabe: **„ALG Z 2*x^3-15*x^2+x+4.5“**

Ausgabe: **„2*(x-7,3912)*(x+0,5)*(x-0,6088)“**

Einzelne Faktoren können auch vom Grad 2 sein.

2. Beispiel:

Eingabe: **„ALG Z -3*x^5-15*x+9“**

Ausgabe: **„-3*(x^2+2,3667*x+2,5523)*(x^2-1,7805*x+2,0053)*(x-0,5862)“**

Die Eingabe des Polynomterms ist nicht zwingend in Standardform erforderlich:

3. Beispiel:

Eingabe: **„ALG Z (x^3+1)^2-5*x+16**

Ausgabe:

„1*(x^2+3,0089*x+2,8861)*(x^2-0,515*x+2,7078)*(x^2-2,4939*x+2,1753)“

Anmerkung:

Die Berechnung erfolgt über das Unterprogramm „Algebraische Gleichungen / Bruchgleichungen“ (**ALG**). Die Bearbeitungsdauer kann daher einige Sekunden betragen.

Die Koeffizienten werden gerundet und mit 4 Nachkommastellen ausgegeben.

Umwandlung von Polynomtermen in Standardform $p(x)$; 1. Ableitung $p_1(x)$ und 2. Ableitung $p_2(x)$

Für die Kennung gibt man die Zeichenfolge „**ALG S**“ und anschließend den Polynomterm ein.

Nach [**ENTER**] werden die Potenzen in absteigender Reihenfolge ausgegeben und die erste / zweite Ableitung ausgegeben:

1. Beispiel:

Eingabe: „**ALG S** $2+x^3-5*x+1.1*x^4+9*x^7$ “

Ausgabe:

Das Polynom p: $p(x) = 2+x^3-5*x+1.1*x^4+9*x^7$

hat die Standardform :

$$p(x) = 9*x^7+0*x^6+0*x^5+1,1*x^4+1*x^3+0*x^2-5*x^1+2$$

Erste Ableitung $p_1(x)$:

$$p_1(x) = 63*x^6+0*x^5+0*x^4+4,4*x^3+3*x^2+0*x^1-5$$

Zweite Ableitung $p_2(x)$:

$$p_2(x) = 378*x^5+0*x^4+0*x^3+13,2*x^2+6*x^1+0$$

Auch Klammerterme können eingegeben werden:

2. Beispiel:

Eingabe: „**ALG S** $(x-3)*(x+5)^2$ “

Ausgabe:

Das Polynom p: $p(x) = (x-3)*(x+5)^2$

hat die Standardform :

$$p(x) = 1*x^3+7*x^2-5*x^1-75$$

Erste Ableitung $p_1(x)$:

$$p_1(x) = 3*x^2+14*x^1-5$$

Zweite Ableitung $p_2(x)$:

$$p_2(x) = 6*x^1+14$$

Splineinterpolation

Anstelle der Polynominterpolation verwendet man in der Praxis häufig die Splineinterpolation. Sie hat den Vorteil, im Vergleich zur Interpolation durch Polynome hohen Grades nicht den großen Schwankungen zwischen den Interpolationspunkten zu unterliegen.

(s. hierzu Lehrbuch der numerischen Mathematik!)

Zu **n** gegebenen Werte-/Koordinatenpaaren $(x_i | y_i)$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i wird eine Funktion $s(x)$ bestimmt, die abschnittsweise auf den Intervallen:

$[x_i \dots x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n-1$)

durch **Polynome 3. Grades** p_i ($i = 1, \dots, n-1$) definiert ist.

Zusätzlich sollen für die **Funktionen** p_i , ps_i (**1. Ableitung**) und pss_i (**2. Ableitung**) folgende Bedingungen gelten:

$$p_1(x_1) = y_1$$

$$p_{n-1}(x_n) = y_n$$

$$p_i(x_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$ps_i(x_i) = ps_{i+1}(x_i) \quad (i = 2, \dots, n-1)$$

$$pss_1(x_1) = 0$$

$$pss_{n-1}(x_n) = 0$$

erfüllt.

Eine solche Funktion $s(x)$ heißt „**natürlicher kubischer Spline**“ (in Abgrenzung zu anderen Splinearten).

Der Satz von Bedingungen bewirkt einen „glatte“ Anschluss der einzelnen Polynome p_i in den Stützwerten x_2, \dots, x_{n-1} (Der Gesamtverlauf ist stetig; weder Steigung noch Krümmungsverhalten ändern sich „abrupt“!). Zusätzlich hat der Spline in $P(x_1 | y_1)$ und $Q(x_n | y_n)$ die Krümmung 0.

Die durch diesen Satz von Bedingungen (abschnittsweise) definierte Funktion $s(x)$ existiert stets und ist eindeutig festgelegt.

Das Programm berechnet die Koeffizienten der einzelnen Polynome 3. Grades.

Vor der Berechnung der Polynomkoeffizienten ist die Eingabe **von n Werte-/Koordinatenpaaren** ($3 \leq n \leq 9$) erforderlich.

Nach Eintrag der Kennung „**SPLINE**“ und **[ENTER]** erscheint im Textfenster „Eingabe“ die Zeichenfolge: „**SPLINE x y x y x y**“. Man trägt hinter dem Symbol „**x**“ die **x-Koordinate**, hinter dem Symbol „**y**“ die **y-Koordinate** ein und setzt die Zeichenfolge entsprechend fort.

Beispiel(mit 4 Wertepaaren):

„**SPLINE x-3 y1 x-2 y-1 x1 y11 x2 y0**“

Nach **[ENTER]** erscheint im Formblatt "**Splineinterpolation**“:

„**Zu den Wertepaaren (-3|1) (-2|-1) (-1|11) (2|0)**

werden die Koeffizienten des kubischen Interpolationssplines abschnittsweise auf den Teilintervallen [-3...-2], [-2...-1], [-1...2] berechnet:

1. Teilintervall [-3...-2]

$$p_1(x) = a_1(x) \cdot x^3 + b_1(x) \cdot x^2 + c_1(x) \cdot x + d_1(x)$$

$$a_1 = 4,11828$$

$$b_1 = 37,064516$$

$$c_1 = 105,075269$$

$$d_1 = 93,83871$$

2. Teilintervall [-2...-1]

$$p_2(x) = a_2(x) \cdot x^3 + b_2(x) \cdot x^2 + c_2(x) \cdot x + d_2(x)$$

$$a_2 = -6,591398$$

$$b_2 = -27,193548$$

$$c_2 = -23,44086$$

$$d_2 = 8,16129$$

3. Teilintervall [-1...2]

$$p_3(x) = a_3(x) \cdot x^3 + b_3(x) \cdot x^2 + c_3(x) \cdot x + d_3(x)$$

$$a_3 = 0,824373$$

$$b_3 = -4,946237$$

$$c_3 = -1,193548$$

$$d_3 = 15,577061$$

Fügt man hinter der Kennung „**SPLINE**“ die Zeichenkette „**XX**“ und danach eine Dezimalzahl **kk** ein, wird zusätzlich der Funktionswert **s(kk)** berechnet. In unserem Beispiel ist für **kk = 2,5** in das Fenster „Eingabe“ einzutragen:

„**SPLINE xx-2,5 x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0**“

(s. hierzu [Bild 56](#)).

Fügt man hinter der Kennung „**POLY**“ den Buchstaben „**P**“ ein, werden die den Koordinatenpaaren zugeordneten Punkte und der Graph der Polynomfunktion **P** gezeichnet.

In unserem Beispiel ist in das Fenster „Eingabe“ einzutragen:

„**SPLINE P x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0**“

(s. hierzu [Bild 57](#)).

Anmerkung:

Mit der Kennung „**SPLINE m**“ – wobei **m** eine Ziffer ($3 \leq m \leq 9$) ist – werden nach **[ENTER]** **m** Wertepaare mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugt.

Beispiel:

Eingabe: „**SPLINE5**“

[ENTER]

Textfenster „Eingabe“: „**SPLINE x-3y7x-2y6x-1y1x0y9x1y-1**“

Nullstellen

Für die Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f trägt man in das Fenster "**Eingabe**" die Kennung "**NULL**" ([STRG] + [N]) und den Funktionsterm " $f(x)$ " ein.

Die Nullstellen erscheinen dann mit [ENTER] im Fenster "**Ausgabe**" durch das Zeichen "|" voneinander getrennt.

Ohne weitere Angaben werden die Nullstellen nach Voreinstellung im Intervall **[-20,20]** gesucht. Liegen die gesuchten Nullstellen teilweise oder insgesamt außerhalb dieses Intervalls, so müssen die Intervallgrenzen neu festgelegt werden. Nach dem Eintrag der Kennung "**NULL**" wird die linke Intervallgrenze a , dann die rechte Intervallgrenze b eingetragen. Den Zahlenwerten a und b muss jeweils das Trennungszeichen "|" oder ";" folgen.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung: $f(x) = x^2 - 28x - 90$.

Eingabe: "NULL -20| 20| $x^2-28x-90$ " **Ausgabe:** -2,91153

Jetzt wird das Intervall **[-20,20]** auf **[-20,40]** vergrößert:

Eingabe: "NULL -20| 40| $x^2-28x-90$ "

[ENTER]

Ausgabe: -2,91153 | 30,91153

Weiteres Beispiel siehe Bild 11 !

Nullstellen (Polynome)

Für die Bestimmung aller (reellen und komplexen) Nullstellen eines Polynoms p mit reellen Koeffizienten trägt man in das Fenster "**Eingabe**" die Kennung "**NULLPOLY**" und den Grad des Polynoms ein. Nach **[ENTER]** erscheint im Fenster „Eingabe“ ein Raster für die Eingabe der Koeffizienten a_n .

(Das Polynom p muss in Standardform: $p(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ vorliegen.)

1. Beispiel: $p(x) = 3 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 15$

Eingabe: **NULLPOLY2**

[ENTER]

Eingabefenster: „**NULLPOLY**| a_2 | a_1 | a_0 | |“

Eintrag der Koeffizienten: „**NULLPOLY**| a_2 | 3 | a_1 | 7 | a_0 | -15 |“

Ohne weitere Angaben werden alle Nullstellen in einem gesonderten Formblatt aufgelistet.

Ausgabe:

„**Nullstellen des Polynoms p:**

(-3.688791)

(1.355458)

Koeffizienten des Polynoms p:

($p(x) = a_2 \cdot x^2 + \dots + a_1 \cdot x + a_0$)

$a_2 = 3$

$a_1 = 7$

$a_0 = -15$ “

2. Beispiel: $p(x) = 3 \cdot x^3 + 7 \cdot x + 15$

Eingabe:

„**NULLPOLY**| a_3 |3| a_2 |0| a_1 |7| a_0 |15|“

Ausgabe:

Nullstellen des Polynoms p:

(-1.268365)

(0.634182+1.881461i)

(0.634182-1.881461i)

Wenn nur die reellen Nullstellen bestimmt werden sollen, hängt man der Befehlszeile „**NULLPOLY**| a_n | | a_1 | a_0 | |“ das Symbol „**R**“ an.

3. Beispiel: $p(x) = 3 \cdot x^3 + 7 \cdot x + 15$

Eingabe:

„**NULLPOLY**| a_3 |3| a_2 |0| a_1 |7| a_0 |15|**R**“

Ausgabe:

„**Nullstellen des Polynoms p:**

(-1.268365)

Wenn mehr als 2 Nullstellen untereinander gleich sind, werden diese Nullstellen nicht exakt bestimmt

4. Beispiel:

Eingabe: „NULLPOLY|a_4|1|a_3|-5|a_2|6|a_1|4|a_0|-8|“

Ausgabe:

„Nullstellen des Polynoms p:

(-1)

(2,000399746945)

(2,000399746945)

(1,999644693745)“

Die Nullstelle „2“ tritt angenähert 3 mal auf!

Anmerkung:

Wenn man dem Raster eine Ziffer n anfügt (z.B. „NULLPOLY A|| | || | ||2“), werden zusätzlich mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators Zahlen mit n Nachkommastellen eingefügt.

Ableitung an der Stelle x / Tangentengleichung

Für die Berechnung der Ableitung an der Stelle x einer Funktion f trägt man in das Fenster "**Eingabe**" die Kennung "**ABL**" ein (Tastencode: **([STRG] + [A])**).

Nach **[ENTER]** erscheint: „**ABL | x= | f(x)=**“

Nach dem Eintrag eines Wertes für x und des Funktionsterm f(x) wird die Ableitung von f(x) an der Stelle x ausgegeben.

Beispiele:

1.

Eingabe: „**ABL | x= 3,5| f(x)= 3x^2**“

Ausgabe: „**21**“

2.

Eingabe: „**ABL | x= -1,3| f(x)= cos(x)/(x^2+1)**“

Ausgabe: „**0,4543149588**“

Fügt man dem Funktionsterm f(x) das Symbol „t“ hinzu, wird die Gleichung der Tangente, die den Graphen von f an der Stelle (x / f(x)) berührt, ausgegeben:

3.

Eingabe: „**ABL | x= 3,5| f(x)= 3x^2t**“

Ausgabe: „**t(x) = 21*x - 36,75**“

4.

Eingabe: „**ABL | x= -1,3| f(x)= cos(x)/(x^2+1) t**“

Ausgabe: „**t(x) = 0,4543149588*x + 0,6900513902**“

Anmerkung:

Die Eingabe kann auch in "Kurzfassung" erfolgen:

(1. Beispiel): „**ABL 3,5| 3x^2**“

(2. Beispiel): „**ABL-1,3| cos(x)/(x^2+1)**“

(3. Beispiel): „**ABL 3,5| 3x^2t**“

(4. Beispiel): „**ABL-1,3|cos(x)/(x^2+1) t**“

Anstelle des Trennungszeichens „|“ kann auch das auf der Tastatur leichter erreichbare Semikolon „;“ eingetragen werden.

Hoch--, Tiefpunkte

Für die Bestimmung der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen einer Funktion f trägt man in das Fenster "**Eingabe**" die Kennung "**MAX**" und den Funktionsterm " $f(x)$ " ein (Tastencode: **[STRG] + [H]**).

Es erscheint im Textfenster: "Eingabe": "**MAX -20| 20| $f(x)$** ".

Nach Voreinstellung werden ohne weitere Korrekturen die Hoch- und Tiefpunkte im Intervall **[-20,20]** gesucht. Liegen die gesuchten Hoch- und Tiefpunkte teilweise oder insgesamt außerhalb dieses Intervalls, sind die Intervallgrenzen entsprechend zu ändern.

Die Koordinaten der Hochpunkte(**HP**) und Tiefpunkte(**TP**) erscheinen dann mit **[ENTER]** im Fenster "**Ausgabe**" und in einem zusätzlich geöffneten Textformular.

Beispiele:

1.

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung: $f(x) = x^2 - 28x - 90$.

Eingabe: "**MAX -20| 20| $x^2 - 28x - 90$** "

Ausgabe: "**TP(14|-286)**"

2.

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung: $f(x) = x \cdot (x^2 - 25)$.

Eingabe: "**MAX -20| 20| $x \cdot (x^2 - 25)$** "

Ausgabe: "**(2 Hochpunkte(HP) / Tiefpunkte(TP))**"

"**HP(-2,886751|48,112522)**"

"**TP(2,886751|-48,112522)**"

Weiteres Beispiel siehe Bild 39, Bild 40 und Bild 41

Anmerkung:

Die Extrema können nur dann **korrekt** bestimmt werden, wenn die Funktion in dem betrachteten Intervall stetig ist, also keine Sprünge (Polstellen) aufweist. Dies soll an folgendem Beispiel erläutert werden:

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (-x^2 + 3x - 2) / (-x^2 + 5x)$ besitzt die Polstellen $x=0$ und $x=5$; daher müssen 3 Fälle getrennt voneinander untersucht werden:

a) **Eingabe:** "**MAX -20|-0.1| $(-x^2 + 3x - 2) / (-x^2 + 5x)$** "

b) **Eingabe:** "**MAX 0,1|4,9| $(-x^2 + 3x - 2) / (-x^2 + 5x)$** "

c) **Eingabe:** "**MAX 5,1|20| $(-x^2 + 3x - 2) / (-x^2 + 5x)$** "

Wendepunkte / Krümmungsverhalten

Für die Bestimmung von Wendepunkten und Krümmungsverhalten eines Funktionsgraphen trägt man in das Fenster "**Eingabe**" die Kennung "**WEN**" und den Funktionsterm "**f(x)**" ein (Tastencode: ([STRG] + [W])).
 Es erscheint im Textfenster "Eingabe": "**WEN -20| 20| f(x)**".
 Nach Voreinstellung werden ohne weitere Korrekturen die Wendepunkte im Intervall **[-20,20]** gesucht. Liegen die gesuchten Wendepunkte teilweise oder insgesamt außerhalb dieses Intervalls, sind die Intervallgrenzen entsprechend zu ändern.
 Die Koordinaten der Wendepunkte(**WP**) erscheinen dann mit **[ENTER]** im Fenster "**Ausgabe**" und in einem zusätzlich geöffneten Textformular.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung: $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 25)$.

Eingabe: "WEN -20| 20| (x-1)*(12 - x)/30"

Ausgabe

„Wendepunkte der Funktion f:

$f(x) = x^2 \cdot (12-x)/30$

im Intervall [-20...20]

1 Wendepunkt(e)

WP(4|4,26667) Steigung: m = 1,6

Wechsel von Links-- zur Rechtskurve"

(s. [Bild 45](#))

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung: $f(x) = x^2 - 28 \cdot x - 90$.

Eingabe: "WEN -20| 20| $x^2 - 28 \cdot x - 90$ "

Ausgabe: " Keine Wendepunkte ! Linkskurve !"

Integration (numerisch)

Nach dem Eintrag der Kennung **"INT"**, zweier Zahlwerte a und b, denen jeweils das Trennzeichen **"|"** (oder **";"**) folgen muss, und eines Funktionsterms f im Textfenster "Eingabe" wertet das Programm numerisch nach **[ENTER]** mit Hilfe des Simpson-Verfahrens das Integral über die Funktion f in den Grenzen a und b aus. (Tastencode: **STRG + "I"**)

Beispiel:

"INT -3| 5| x^2-3x +1"; Ausgabe: **34,666667**

Ein weiteres Beispiel findet man in Bild 10

Anmerkung:

Wenn der Integrand am Anfang oder Ende des Integrationsintervalls nicht definiert ist, wird durch eine geringfügige Reduktion des Integrationsintervalls (um 10^{-9}) überprüft, ob es sich um ein divergentes oder konvergentes (uneigentliches) Integral handelt.

Beispiel:

Eingabe: **Int 0|5| 1/(5-x)**

Ausgabe: **2108,409448 Integrand nicht definiert für x = 5!**

Das Ergebnis ist folgendermaßen zu interpretieren:

Das bestimmte Integral (mit veränderter oberer Intervallgrenze) hat hohen Wert. **Das uneigentliche Integral existiert nicht!**

Eingabe: **Int 0|5| 1/(5-x)^0,5**

Ausgabe: **4,536288166 Integrand nicht definiert für x = 5**

Das Ergebnis ist folgendermaßen zu interpretieren:

Das uneigentliche Integral existiert (mit dem Wert 4,5362.....)

Abstand eines Punktes von einem Funktionsgraphen

Als Abstand eines Punktes **P** von einer Geraden **G** bzw. Ebenen **E** bezeichnet man die Länge des Lotes von **P** auf **G** bzw. **E**. Das Lot ist die kürzeste geradlinige Verbindung von **P** mit **G** bzw. **E**, wie leicht nachzuweisen ist. Diese Eigenschaft kann man als Definition für den Abstand zu einer beliebigen Punktmenge **M** verwenden. Wir beschränken uns auf den 2-dimensionalen Koordinatensystem, in dem **M** durch eine Funktion **f: y = f(x)** beschrieben wird.

Das Programm berechnet zu den vorgegebenen Koordinaten (**x_1** | **y_1**) des Punktes **P** und dem Funktionsgraphen **y = f(x)** die Koordinaten (**x_2** | **y_2**) des nächstgelegenen Graphenpunktes **Q** und die Länge der Strecke **PQ**.

Nach dem Eintrag der Kennung „**ABST**“ im Textfenster „**Eingabe**“ und **[ENTER]** erscheint in diesem Textfenster: „**ABST** || **P 0 | 0** || **f(x)**“.

Die Koordinaten (**0 | 0**) können natürlich durch beliebige andere Werte ersetzt werden; für **f(x)** ist der aktuelle Funktionsterm einzusetzen.

Mit **[ENTER]** erscheint dann: „**ABST -20 | 20** || **P 0 | 0** || **f(x)**“.

Nach einem weiteren **[ENTER]** sucht das Programm den Punkt **Q(x|y)** in dem Intervall **[-20...20]**. Die Werte „**-20**“ und „**20**“ können zuvor durch andere ersetzt werden.

1. Beispiel:

Zu berechnen ist der Abstand des Punktes **P(3|3)** zu der Parabel mit der Gleichung **f(x) = x^2 + 5** im Intervall **[-5...5]**.

Eingabe:

„**ABST -5 | 5** || **P 3 | 3** || **x^2 + 1**“

Ausgabe:

„**Gegeben sind der Punkt P(3|3) und**

der Graph f: f(x) = x^2+1

im Intervall [-5...5].

Von allen auf f liegenden Punkten liegt

Q(1,567468|3,456957) Abstand(QP) = 1,503648

dem Punkt P am nächsten.“ (siehe [Bild 43](#))

2. Beispiel:

Zu berechnen ist der Abstand des Punktes **P(-3|4)** zu dem Graphen mit der Gleichung **$y = \ln(2+(x+3)^2)$** im Intervall **[0...20]**.

Eingabe:

„ABST 0|20||P-3|4||ln(2+(x+3)^2)“

Ausgabe:

**„Gegeben sind der Punkt P(-3|4) und
der Graph f: $f(x) = \ln(2+(x+3)^2)$
im Intervall [-50...70].**

Von allen auf f liegenden Punkten liegt

Q(-4,686525|1,577817) Abstand(QP) = 2,951498

Q(-1,313475|1,577817) Abstand(QP) = 2,951498

dem Punkt P am nächsten.“

Das Intervall **[0...20]** wurde während der Programmausführung auf **[-50...70]** erweitert, um die Punkte Q des Graphen, die dem Punkt P am nächsten liegen, zu erfassen (siehe [Bild 44](#)).

Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$

Für die Funktion $z = f(x,y)$ wird auf dem Rechteck $[x_a \leq x \leq x_e]$, $[y_a \leq y \leq y_e]$ das (absolute) Maximum / Minimum bestimmt.

Nach dem Betätigen der Tastenkombination **[STRG] + [Z]** (Alternative: Eintrag im Textfeld Eingabe: „**EXTR**“ und **[ENTER]**) erscheint im

Textfeld „Eingabe“: „**EXTR |MAX MIN| x_a -20| x_e 20| y_a -20| y_e 20| $f(x,y)$ “.**

Die Voreinstellungen für x_a (= -20), x_e (= 20), y_a (= -20) und y_e (= 20) können jetzt noch geändert werden.

Das Symbol „ $f(x)$ “ ist durch den zu untersuchenden Term (z. B. „ $x^2 + y$ “) zu ersetzen.

Nach Voreinstellung wird das absolute **Maximum z_{\max}** in dem **vorgegebenen Rechteck ermittelt.**

Für die Berechnung des absoluten Minimums z_{\min} ist die Buchstabenfolge „MAX“ im Textfeld „Eingabe“ zu löschen !

Die Ausgabe erfolgt nach **[ENTER]** im Textfenster „Ausgabe“:

P(x_{\max} | y_{\max} | z_{\max}) bzw. P(x_{\min} | y_{\min} | z_{\min}). Hierbei berücksichtigt das Programm auch Punkte auf den Seiten des vorgegebenen Rechtecks („Randmaximum“ / „Randminimum“).

Wird das (absolute) Maximum bzw. Minimum an mehreren Stellen (x | y) angenommen, so wird nur die Position mit der kleinsten x -Koordinate ausgegeben.

Beispiel:

Es ist (I) das **Maximum** und (II) das **Minimum** der Funktion **$f(x,y) = 1/(1+\text{abs}(y*x))-(x+2)^2-(y+1)^2$** in dem Rechteck (x | y) mit **$[-20 \leq x \leq 20]$** und **$[-20 \leq y \leq 20]$** zu bestimmen:

I)

Eingabe:

„**EXTR |MAXMIN| x_a -20| x_e 20| y_a -20| y_e 20| $1/(1+\text{abs}(y*x))-(x+2)^2-(y+1)^2$ “**

Ausgabe:

„**P_max(-1,93968 | -0,864689 | 0,351574)**“

II)

Eingabe:

„**EXTR |MIN| x_a -20| x_e 20| y_a -20| y_e 20| $1/(1+\text{abs}(y*x))-(x+2)^2-(y+1)^2$ “**

Ausgabe:

„**P_min(20 | 20 | -924,997506) RandMinimum !**“

Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$ mit einer Nebenbedingung(NB)

Für die Funktion $z = f(x,y)$ wird in dem Intervall $[x_a \leq x \leq x_e]$ das (absolute) Maximum / Minimum bestimmt. Hierbei erfüllt das Wertepaar

(x_max / y_max) bzw. **(x_min / y_min)** die Gleichung NB.

Nach dem Betätigen der Tastenkombination **[STRG] + [E]**

(Alternative: Eintrag im Textfeld Eingabe: „**EXNB**“ und **[ENTER]**) erscheint im Textfeld „Eingabe“: „**EXNB |MAX MIN|x_a -20|x_e 20|f(x,y) |NB |**“.

Nach Voreinstellung wird das **Maximum z_max** in dem vorgegebenen Intervall ermittelt.

Für die Berechnung des Minimums **z_min** ist die Buchstabenfolge „**MAX**“ im Textfeld „Eingabe“ zu entfernen !

Die Voreinstellungen für x_a (= -20), x_e (= 20), y_a (= -20) und y_e (= 20) können jetzt noch geändert werden.

Nach dem Eintrag „**f(x,y)**“ ist ein Funktionsterm (z. B. „ $x^2 + y$ “) einzufügen.

Nach dem Eintrag „**NB**“ ist eine Gleichung (z. B. „ $x^2 + y = 5$ “) einzufügen.

Nach **[ENTER]** erfolgt die Ausgabe im Textfenster „Ausgabe“:

P(x_max | y_max | z_max) bzw. **P(x_min | y_min | z_min)**.

Hierbei berücksichtigt das Programm auch Punkte an den Intervallenden („Randmaximum“ / „Randminimum“).

Wird das (absolute) Maximum bzw. Minimum an mehreren Stellen (x | y) angenommen, so wird nur die Position mit der kleinsten x -Koordinate ausgegeben.

Beispiele:

I)

Das **Maximum** der Funktion **$f(x,y) = x^2 \cdot y$** in dem Intervall **$[0 \leq x \leq 40]$** ist zu bestimmen. Die Nebenbedingung NB lautet: **$x = 40 - 2 \cdot y$** .

Eingabe:

„**EXNB |MAXMIN|x_a 0|x_e 40|f(x,y) = $x^2 \cdot y$ |NB $x = 40 - 2 \cdot y$ |**“

Ausgabe:

P_max(26,66667 | 6,66667 | 4740,74074)

Das Maximum der Funktion $f(x,y) = x^2 \cdot y$ wird an der Stelle ($x_{\max}=26,66667$ | $y_{\max}=6,66667$) der x - y -Ebene angenommen; es hat den Wert $z_{\max}=4740,74074$.

II)

Wir verlängern das Intervall am linken Ende.

Eingabe:

„**EXNB |MAXMIN|x_a -20|x_e 40|f(x,y) = $x^2 \cdot y$ |NB $x = 40 - 2 \cdot y$ |**“

Ausgabe:

P_max(-20 | 30 | 12000) RandMaximum !

Das (absolute) Maximum wird jetzt am linken Ende des Intervalls angenommen.

(Das relative Maximum an der Stelle ($x_{\max}=26,66667$ | $y_{\max}=6,66667$))

wird nicht mehr angezeigt.)

III)

Die Nebenbedingung wird verändert zu: $x^2 + y^2 = 100$

Es wird das Maximum bestimmt:

Eingabe:

„**EXNB |MAXMIN|xa -20|xe 40|f(x,y) = x^2*y|NB x^2+y^2 = 100|**“

Ausgabe:

“P_max(-8,16497 | 5,7735 | 384,90018)“

IV)

Es wird das Minimum bestimmt:

Eingabe:

„**EXNB |MIN|xa -20|xe 40|f(x,y) = x^2*y|NB x^2+y^2 = 100|**“

Ausgabe:

“P_min(-8,16497 | -5,7735 | -384,90018)“.

Gleichungen (mit einer Unbekannten)

Lineare und nichtlineare Gleichungen mit einer Unbekannten werden gelöst. Zu diesem Zweck trägt man in das Textfeld "Eingabe" die Kennung **"GLG"** (**Alternative: Tastenkombination [STRG] + [G]**) und dann die **Gleichung** ein.

Beispiel: (Textfeld "Eingabe") **GLG $3x^2+(x-3)*(5-2x) = -2$**

Nach **[ENTER]** oder Anklicken der Befehlsschaltfläche "Berechnen" erhält man **„GLG -20| 20| $3x^2+(x-3)*(5-2x) = -2$ “**.

Nach einem nochmaligen [ENTER] werden alle Lösungen im Intervall [-20...20] ermittelt und bei mehreren Lösungen auf einem gesonderten Formblatt angezeigt, in unserem Beispiel: „-12,07647 | 1,07647“

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems ist Folgendes zu beachten:

1.

Die Unbekannte darf nur mit **"x"** bezeichnet werden.

2.

Die Gleichung kann auch transzendente Terme enthalten.

z.B.

Eingabe:

„0.5x = sin(x)“ (x im Bogenmaß "rad")

Ausgabe:

„-1,89549 | 0 | 1,89549“

3.

Ohne weitere Angaben werden die Lösungen in dem Intervall **[-20...20]** gesucht. Sollten die Lösungen außerhalb dieses Intervalls liegen, müssen andere geeignete Intervallgrenzen - durch das Zeichen **"|"** oder **";"** voneinander getrennt - der Gleichung vorangestellt werden.

Beispiel: **GLG -60|60 | $(x-40)*(x+45) = 1$**

Ergebnisse: **-45,01176 | 40,01176**

Zu der Eingabe **"GLG -20| 20| $(x-40)*(x+45) = 1$ "** gibt das Programm **"keine Lösung gefunden !"** aus.

Hat man nur eine ungefähre Vorstellung von der Lage der Lösungen, so ist es zweckmäßig, das Intervall möglichst so groß zu wählen, dass alle Lösungen in diesem Intervall liegen.

Enthält das Suchintervall [a...b] Zahlenwerte, für die die vorgegebene Gleichung nicht definiert ist, wird die Auswertung mit der Ausgabe „Berechnung nicht durchführbar!“ unterbrochen!

Beispiel:

Eingabe: **„GLG -1|20| $\ln(x^3)=\ln(x)+5$ “**

Ausgabe: **„Berechnung nicht durchführbar!“**

Die Spezialfälle: „Gleichungen mit logarithmischen Termen / Wurzeltermen“ werden im nächsten Abschnitt gesondert behandelt!

Weiteres Beispiel siehe Bild 12

Wenn man der vorgegebenen Gleichung das Symbol **„S“** anfügt, werden zusätzlich die Koordinaten der Punkte ausgegeben, in denen sich die

Graphen der rechts- und linksseitigen Funktionsterme **schneiden**. Mit dem Zusatz:

„**(mehrfach)**“ wird darauf hingewiesen, dass sich die Graphen **berühren**.

Beispiel:

Eingabe:

“GLG -20| 20| $x^3+2*x^2+2*x+1=9*x-3$ S“

Ausgabe:

Schnittpunkte:

$x^3+2*x^2+2*x+1 = 9*x-3$

im Intervall [-20...20]:**(2 Schnittpunkt(e))****Schnittpunkt: (-4 | -39)****Schnittpunkt: (1(mehrfach) | 6)**

Gleichungen mit logarithmischen Termen / Wurzeltermen

Der Definitionsbereich von Gleichungen mit logarithmischen Termen / Wurzeltermen ist beschränkt.

Um einen vorzeitigen Fehlerabbruch zu vermeiden, setzt man in diesem Fall **die Argumente der auftretenden logarithmischen Terme / Wurzelterme in eckige Klammern**.

1. Beispiel:

Es sollen alle Lösungen der Gleichung $\ln(x^3)=\ln(x)+5$ im Intervall $[-20..20]$ ermittelt werden.

Eingabe: **GLG -20|20| $\ln[x^3]=\ln[x]+5$**

Ausgabe: **1 Lösung in $[-20...20]$: 12,182494**

2. Beispiel:

Es sollen alle Lösungen der Gleichung $x+\text{sqr}(x-x^2)= -2*x^2+1$ im Intervall $[-20..20]$ ermittelt werden.

Eingabe: **GLG -20|20| $x+\text{sqr}[x-x^2]=-2*x^2+1$**

Ausgabe: **1 Lösung in $[-20...20]$: 0,323269**

3. Beispiel:

Es sollen alle Lösungen der Gleichung $(5-x)/\text{sqr}(x^2-5*x-7)=-\text{sqr}(91)/13$ im Intervall $[-20..20]$ ermittelt werden.

Eingabe: **GLG -20|20| $(5-x)/(\text{sqr}[x^2-5*x-7]) = -\text{sqr}(91)/13$**

Ausgabe: **2 Lösung(en) in $[-20...20]$: 7,333333 | 8,5**

Quadratische Gleichungen

Für die Bestimmung aller (reellen und komplexen) Nullstellen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten trägt man in das Fenster **"Eingabe"** die Kennung **"QUAD"** ein.

Nach **[ENTER]** (Tastenkombination **[STRG] + [Q]**) erscheint im Fenster „Eingabe“ ein Raster für die Eingabe der Koeffizienten **a₂, a₁, a₀**:

„QUAD |a₂| |a₁| |a₀| |“.

Die quadratische Gleichung muss in Standardform: **a₂*x²+a₁* x + a₀ = 0** vorliegen.

1. Beispiel: **3*x² + 7*x – 15 = 0.**

Eingabe: **QUAD**

[ENTER]

Eingabefenster: **„QUAD |a₂| |a₁| |a₀| |“**

Eintrag der Koeffizienten: **„QUAD |a₂| 3 |a₁| 7 |a₀| -15 |“**

[ENTER]

Die beiden Lösungen werden auf einem gesonderten Formblatt als Wurzelterm **„sqrt(...)“** und zusätzlich in Dezimalform aufgelistet:

Ausgabe: **„Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind reell!“**

„x₁ = -7/6 + sqrt(229/36) = 1,355458“

„x₂ = -7/6 - sqrt(229/36) = -3,688791“

Die Koeffizienten können als **ganze Zahlen** („a“), **Brüche** („a/b“), **gemischte Zahlen** („a +b/c“) oder **Dezimalbrüche** eingegeben werden.

2. Beispiel: **-3/7*x² + (7+1/3)*x – 15,67 = 0.**

Eingabe: **„QUAD |a₂|-3/7 |a₁| 7+1/3 |a₀| -15,67 |“**

Ausgabe: **„Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind reell!“**

„x₁ = 77/9 + sqrt(296737/8100) = 14,608175

„x₂ = 77/9 - sqrt(296737/8100) = 2,502936

3. Beispiel: **4*x² + 9/4 = 0.**

Eingabe: **„QUAD |a₂|4 |a₁| 0 |a₀| 9/4 |“**

Ausgabe: **Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind komplex!**

x₁ = 0 + sqrt(9/16)*i = 0,75*i

x₂ = 0 - sqrt(9/16)*i = -0,75*i

Anmerkungen:

Die Eingabe kann auch in „Kurzfassung“ erfolgen:

(1. Beispiel): **„QUAD 3 | 7 | -15 “**

(2. Beispiel): **„QUAD -3/7 | 7+1/3 | -15,67 “**

(3. Beispiel): **„QUAD 4 | 0 | 9/4 “**

Anstelle des Trennungszeichens „|“ kann auch das auf der Tastatur leichter erreichbare Semikolon „;“ eingetragen werden.

Für das Lösen von quadratischen Gleichungen, die nicht in Standardform (s.o.) vorliegen, bietet sich als Alternative die Routine zum Lösen von Gleichungen (s. Abschnitt **„Gleichungen (mit einer Unbekannten)“**) an. Hierbei ist zu beachten, dass nur reelle Lösungen als Dezimalzahlen ausgegeben werden.

Algebraische Gleichungen / Bruchgleichungen

In einer algebraischen Gleichung werden mit der Unbekannten (hier mit „x“ bezeichnet) und konstanten Zahlen nur die algebraischen Rechenoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division vorgenommen. (Das Potenzieren ist dabei als Sonderfall der Multiplikation zu betrachten.)

Das Programm berechnet **alle** (reellen sowie komplexen) Lösungen.

Beispiel 1: $2x^2 - 7,1x = -5,1$

Beispiel 2: $x + (3x - 4)^3 = (2x + 1)^2 + 6$

Eine Gleichung, in der die Variable x im Nenner eines Bruchs auftritt, wird als „Bruchgleichung“ bezeichnet:

Beispiel 3: $5 + 2/(x-3) = 2/(x)$

Die Eingabe der Beispiele 1 und 2 ist einfach durchzuführen:

Zuerst wird die Kennung „**ALG**“ und anschließend die Gleichung eingegeben. Mit **[ENTER]** erfolgt die Ausgabe auf einem gesonderten Textformular.

Beispiel 1:

Eingabe:

„**ALG** $2x^2 - 7,1x = -5,1$ “

Ausgabe:

„**Die Gleichung:** $2x^2 - 7,1x = -5,1$

hat folgende Lösungen:

(2,55)

(1)“

Beispiel 2:

Eingabe:

ALG $x + (3x - 4)^3 = (2x + 1)^2 + 6$

Ausgabe:

Die Gleichung: $x + (3x - 4)^3 = (2x + 1)^2 + 6$

hat folgende Lösungen:

(2,45965)

(0.844249+0.596951i)

(0.844249-0.596951i)

Die Gleichung hat also eine reelle und zwei komplexe Lösungen.

Beispiel 3:

Das Programm liest bei Bruchgleichungen die im Nenner auftretenden Terme aus und bildet daraus den Hauptnenner.

Zur Kennzeichnung müssen daher diese Terme in „eckige Klammern“ gesetzt werden!

Optional wird dem Eingabeterm die Bezeichnung „P“ angefügt; das Programm prüft dann nachträglich nach, ob die gefundenen Zahlenwerte tatsächlich Lösungen der Gleichung sind (Probe):

Eingabe:

ALG 5+2/[x-3]=2/[x]P

Ausgabe:

„Die Gleichung: $5+2/(x-3) = 2/(x)$

hat folgende Lösungen:

(2,524695)

(0,475305)

Probe durch Einsetzen der Lösungen in die linke/rechte Seite der Gleichung: $5+2/(x-3) = 2/(x)$ und Auswertung:

x = (2.524695)

Linke Seite: (0.792175)

Rechte Seite: (0.792175)

x = (0.475305)

Linke Seite: (4.307825)

Rechte Seite: (4.307825)“

Die n-fache Lösung (n = 3, 4,...) einer algebraischen Gleichung wird nur angenähert berechnet!

Beispiel 4:

Eingabe: **„ALG $1*x^6+0*x^5-6*x^4+4*x^3+9*x^2-12*x^1+4=0$ “**

Ausgabe:

Die Gleichung: $1*x^6+0*x^5-6*x^4+4*x^3+9*x^2-12*x^1+4 = 0$

hat folgende Lösungen:

(-2)

(-2)

(0,999921511747)

(0,999921511747)

(1,000078488253)

(1,000078488253)

Die Gleichung hat die 2-fache Lösung „-2“ und die 4-fache Lösung „1“ (angenähert berechnet).

Nachtrag:

Für die Berechnung aller Lösungen wird ein geeignetes Polynom ermittelt, das diese Lösungen als Nullstellen besitzt.

Treten in dem Polynom Potenzen mit Exponenten > 9 auf, gibt das Programm eine Meldung aus und unterbricht den weiteren Ablauf.

Beispiel:

Eingabe:

„**ALG $x^2 - x^5 / [x^3 - 34x + 1] - 23 = x^7 - 13$** “

Ausgabe:

„**Polynomgrad>9; Berechnung nicht möglich!**“

Lineare Gleichungssysteme

Mit diesem Programm werden Gleichungssysteme in 2, 3 und 4 Unbekannten gelöst. Man trägt zuerst in das Textfeld "Eingabe" die Kennung **"GL2"** bzw. **"GL3"** bzw. **"GL4"** für Gleichungssysteme mit 2 bzw. 3 bzw. 4 Unbekannten ein. Unmittelbar daran werden die Gleichungen des Systems eingetragen. Beispiel: (Textfeld "Eingabe") **GL2 {x + 3y = 1} {-2x + 7y = 7}**

Nach **[ENTER]** oder Anklicken der Befehlsschaltfläche "Berechnen" erhält man im Textfeld "Ausgabe" das Ergebnis: **{X=-1,076923 | Y=0,692308}**

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems ist Folgendes zu beachten:

1.

Das Gleichungssystem muss zuvor so umgewandelt werden, dass alle Glieder, die Unbekannte enthalten, auf der linken Seite und die Glieder ohne Unbekannte auf der rechten Seite der Gleichungen stehen

Ein Gleichungssystem in 2 Unbekannten hat dann die Form:

$$ax + by = c$$

dx + ey = f (a, b, c, d, e und f reelle Zahlen in Dezimaldarstellung oder gewöhnliche Brüche).

2.

Jede Gleichung ist in geschweifte Klammern "{...}" oder - auf der Tastatur leichter erreichbar - in runde Klammern "(...)" einzuschließen.

3.

Als Bezeichner für die Unbekannten dürfen für Gleichungssysteme

in **2 Unbekannten (GL2)** nur die Buchstaben **"x"** und **"y"**,

in **3 Unbekannten (GL3)** nur die Buchstaben **"x"**, **"y"** und **"z"**,

in **4 Unbekannten (GL4)** nur die Buchstaben **"w"**, **"x"**, **"y"** und **"z"** verwendet werden.

4.

In jeder Gleichung ist die oben angegebene (alphabetische) Abfolge der Bezeichner einzuhalten, wobei auch einzelne Bezeichner fehlen dürfen.

In obigem Beispiel würde die Schreibweise **{3y + x = 1} {-2x + 7y = 7}** zu einer Fehlermeldung führen.

Folgendes Beispiel für ein Gleichungssystem in 3 Unbekannten soll die Hinweise nochmals veranschaulichen:

Beispiel 1:

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$x + 0,5y - 2z = 1$$

$$z = 2x + y$$

$$y = 2z + 1$$

In das Textfenster "Eingabe" ist einzutragen:

"GL3 {x + 0,5y - 2z = 1} {-2x - y + z = 0} {y - 2z = 1}"

Die Lösung lautet: **{X=-0,16667 | Y=-0,33333 | Z=-0,66667}**

Ein weiteres Beispiel siehe Bild 13

Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit 2 bzw. 3 Unbekannten kann man auch die Kennungen "**GB2**" bzw. "**GB3**" verwenden.

Die Komponenten des Lösungsvektors (x, y, z) werden dann als Brüche dargestellt.

Beispiel 2:

Eingabe: "**GB3** {x + 0,5y - 2z = 1} {-2x -y + z = 0} {y -2z = 1}"

Ausgabe: "[x=(-1/6)|y=(-1/3)|z=(-2/3)]"

Die Koeffizienten im Gleichungssystem können ebenfalls Brüche oder Dezimalzahlen sein.

Beispiel 3:

Eingabe: "**GB3** {x + 0,5y - 2z = 1} {-2x -3/7y + z = 0} {1/9y -2z = 1}"

Ausgabe: "[x=(-49/102)|y=(21/17)|z=(-22/51)]"

Treten zu viele Brüche im Gleichungssystem auf oder haben Zähler und Nenner zu viele Dezimalstellen, kann es zum Abbruch der Lösungsberechnung kommen. In diesem Fall empfiehlt sich zur näherungsweisen Lösungsberechnung die Kennungen "**GL2**" bzw. "**GL3**" zu verwenden.

Beispiel 4:

Eingabe: "**GB3** {x + 0,5y - 2/66z = 1} {-2x -3/75y + z = 0} {1/91y -2z = 1}"

Ausgabe: "Überlauf!"

Beispiel5:

Eingabe: "**GL3** {x + 0,5y - 2/66z = 1} {-2x -3/75y + z = 0} {1/91y -2z = 1}"

Ausgabe: "[x=-0,29415 | y=2,55884 | z=-0,48594]"

Überbestimmte lineare Gleichungssysteme (mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten)

Untersucht wird das Gleichungssystem:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$$

$$a_3 \cdot x + b_3 \cdot y = c_3.$$

Ein solches Gleichungssystem wird als **überbestimmt** bezeichnet, da die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist. Im Regelfall besitzt dieses Gleichungssystem kein exaktes Lösungspaar $(x | y)$, sodass bei mindestens einer der 3 Gleichungen nach Einsetzen eines beliebigen Zahlenpaares $(x | y)$ der Fehler $r_n \neq 0$ auftritt.

Man definiert die **Fehler r_n** :

$$r_1 = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y - c_1$$

$$r_2 = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y - c_2$$

$$r_3 = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y - c_3$$

und die **Fehlerquadratsumme FF**:

$$FF = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

Ist das Gleichungssystem **exakt lösbar**, so ist **FF = 0**.

Durch eine geeignete Wahl des Zahlenpaares $(x | y)$ soll FF minimiert werden.

Das Programm berechnet dieses Zahlenpaar $(x | y)$ und gibt zusätzlich die Werte r_1 , r_2 , r_3 und FF aus.

Das Gleichungssystem wird mit der Kennung „**ÜBER**“ eingeleitet; man fügt dann die Koeffizienten in Matrixform (s. hierzu Abschnitt „Matrixmultiplikation“) an. Nach [ENTER] erfolgt die Ausgabe.

:

Beispiel 1:

$$2x - 5y = 11$$

$$-5x + 3y = 12$$

$$-3/2 \cdot x - y = 23/2$$

Eingabe:

ÜBER||2|-5|11||-5|3|12||-3/2|-1|23/2||

[ENTER]

Ausgabe:

Das Gleichungssystem ist (exakt) lösbar:

(-4,894737 | -4,157895)

(Zur Kontrolle)

Zusammenstellung der Koeffizienten des Gleichungssystems:

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = -5$$

$$c_1 = 11$$

$$a_2 = -5$$

$$b_2 = 3$$

$$c_2 = 12$$

$$a_3 = -1,5$$

$$b_3 = -1$$

$$c_3 = 11,5$$

Anschaulich bedeutet dies, dass sich die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden in dem Punkt: $P(-4,894737 \mid -4,157895)$ schneiden.

Beispiel 2:

Ersetzen wir die 2. Gleichung durch $2x - 5y = 10$, so erhalten wir

$$2x - 5y = 11$$

$$2x - 5y = 10$$

$$-3/2 \cdot x - y = 23/2$$

Die durch die 1. und 2. Gleichung beschriebenen Geraden verlaufen jetzt parallel.

Eingabe:

ÜBER||2|-5|11||2|-5|10||-3/2|-1|23/2||

[ENTER]

Ausgabe:

Dieses Gleichungssystem ist nicht (exakt) lösbar!

Für das Zahlenpaar: $(-4,947368 \mid -4,078947)$

ist die Fehlerquadratsumme FF:

$$FF = (0,5)^2 + (-0,5)^2 + (0)^2 = 0,5$$

am kleinsten.

Abstände des Punktes $P(-4,947368 \mid -4,078947)$

zu den durch die drei Gleichungen dargestellten Geraden:

Abstand zu Gerade 1: $abst1 = 0,092848$

Abstand zu Gerade 2: $abst2 = 0,092848$

Abstand zu Gerade 3: $abst3 = 0$

Beispiel3:

Gegeben sind im 3-dimensionalen Koordinatenraum (x,y,z)

die Gerade g1:

$$x = -7 + 0 \cdot r$$

$$y = 2 + 1 \cdot r$$

$$z = -3 + 2 \cdot r$$

und die Gerade g2:

$$x = -3 + 1 \cdot s$$

$$y = -3 + 2 \cdot s$$

$$z = 3 + 1 \cdot s$$

Schneiden sich diese Geraden?

Wenn nicht, welchen Abstand haben die Geraden g1 und g2 voneinander.

Zur Berechnung eines eventuell vorliegenden Schnittpunktes werden diese Vektorgleichungen gleichgesetzt; danach werden die Terme geordnet:

$$0 \cdot r - 1 \cdot s = 4$$

$$r - 2 \cdot s = -5$$

$$2 \cdot r - s = 6$$

Eingabe:

ÜBER||0|-1|4||1|-2|-5||2|-1|6||

[ENTER]

Ausgabe:

Dieses Gleichungssystem ist nicht (exakt) lösbar!

Für das Zahlenpaar: $(3 \mid 2)$

ist die Fehlerquadratsumme FF:

$$\mathbf{FF = (6)^2 + (-4)^2 + (2)^2 = 56}$$

am kleinsten.

Auswertung:

Die Geraden schneiden sich also nicht.

Die kürzeste Verbindungsstrecke hat (mit $r=3$ und $s=2$) die Endpunkte:

R(-7 | 5 | 3) und S(-1 | 1 | 5).

Der Minimalabstand beträgt $\text{SQRT}(56)$ (ungefähr 7,48 Längeneinheiten).

(Nicht)Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten (x,y)

Für das Gleichungssystem

$$f(x,y) = a$$

$$g(x,y) = b$$

werden in dem Rechteck (x | y) mit $[x_a \leq x \leq x_e]$ und $[y_a \leq y \leq y_e]$ Lösungen bestimmt.

Nach dem Betätigen der Tastenkombination **[STRG] + [Y]**

(Alternative: Eintrag im Textfeld Eingabe: „**GXY**“ und **[ENTER]**) erscheint im Textfeld „Eingabe“: „**GXY |x_a -20|x_e 20| y_a -20|y_e 20| f(x|y) | g(x|y) |**“.

Die Voreinstellungen für x_a (= -20), x_e (= 20), y_a (= -20) und y_e (= 20) können jetzt noch geändert werden.

Den Symbolen „f(x|y)“ und „g(x|y)“ sind die Gleichungsterme

(z. B.: $f(x,y) = „x^2 + y - 3“$ und $g(x,y) = „2*x - y^2“$) **anzufügen.**

Das Multiplikationssymbol ist bei Multiplikationen immer zu schreiben.

(Beispiel: **„x*y“** und nicht „xy“; **„7,1*x“** und nicht „7,1x“ !).

Mit **[ENTER]** (oder Befehlsfeld „**Berechnung**“) berechnet das Programm alle Lösungen (**x(k), y(k)**) in dem vorgegebenen Rechteck. (Der Index „k“ dient der Numerierung unterschiedlicher Lösungen.) Die Lösungen werden auf einem gesonderten Formblatt zusammengestellt.

Zur Berechnung wird ein iteratives Verfahren (Newton-Verfahren) eingesetzt. Die dazu erforderlichen Startpunkte (Anzahl bei Voreinstellung: 100) liegen gleichmäßig über das vorgegebene Rechteck verteilt.

Die Anzahl der Startpunkte lässt sich durch Eingabe einer weiteren Zahl (z.B. „200“) am Ende der Eingabezeile erhöhen.

„GXY |x_a -20|x_e 20| y_a -20|y_e 20| f(x,y) | g(x,y) |200“

Dies ist dann erforderlich, wenn viele Lösungen auftreten können oder das ausgewählte Rechteck einen wesentlich größeren Bereich als bei Voreinstellung erfasst.

Beispiel:

$$f(x,y) = x + y - 3 = 0$$

$$g(x, y) = x - y^2 = 0$$

Eingabe:

GXY|x_a-20|x_e20|y_a-20|y_e20|f(x|y) x+y-3|g(x|y) x-y^2

Ausgabe:

Lösungen des (nicht)linearen Gleichungssystems:

$$f(x, y) = x+y-3 = 0$$

$$g(x, y) = x-y^2 = 0$$

$$x(1) = 5,302776 \quad y(1) = -2,302776$$

$$x(2) = 1,697224 \quad y(2) = 1,302776$$

(Weiteres Beispiel s. [Bild 46](#) und [Bild 47](#))

Anmerkung:

Das (oben angegebene) Gleichungssystem:

$$f(x,y) = x + y - 3 = 0$$

$$g(x,y) = x - y^2 = 0$$

kann auch durch das gleichwertige System:

$$f(x,y) \quad x+y=3$$

$$g(x,y) \quad x=y^2$$

ersetzt werden !

Eingabe :

„GXY|xa-20|xe20|ya-20|ye20| f(x|y) x+y=3| g(x|y) x=y^2“

Matrixverfahren GAUSS-JORDAN (zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen)

Zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen (hier mit bis zu 50 Unbekannten) wird das Eliminationsverfahren von GAUSS-JORDAN verwendet. Zu diesem Zweck fasst man die Koeffizienten der im Gleichungssystem auftretenden Unbekannten zu einer Matrix (einem rechteckigen Zahlenschema) zusammen.

Die Eingabe wird an einem Beispiel erläutert:

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} -31x + 6y & = & -4 \\ 7x + 8y & = & 0 \end{array}$$

soll gelöst werden.

Damit ist die Matrix:

$$\begin{array}{ccc} -31 & 6 & -4 \\ 7 & 8 & 0 \end{array}$$

einzutragen.

Der Eintrag erfolgt im Textfenster "Eingabe" und beginnt mit der Kennung **"GAUSS"** und Taste **[ENTER]** (Tastencode: **[STRG] + [M]**); es erscheint im Textfenster "Eingabe": **"GAUSS n ||"**. Für **n** ist die Anzahl der Unbekannten (in unserem Beispiel: **"2"**) einzutragen.

Dann wird die 1. Zeile der Matrix eingetragen; sie wird (wie auch jede folgende Zeile) mit dem Begrenzungszeichen **"||"** eingeleitet: Die einzelnen Elemente sind durch das Symbol **"|"** voneinander zu trennen:

GAUSS 2 ||-31 | 6 | -4.

Es folgt der Eintrag der 2. Zeile. Die Eintragung wird mit **"||"** abgeschlossen.

GAUSS 2 ||-31 | 6 | -4.|| 7 | 8 | 0 ||.

Mit **ENTER** wird das Lösungsverfahren in Gang gesetzt.

Das Ergebnis erscheint auf einem gesonderten Formblatt, in unserem Beispiel:

"Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung (x₍₁₎,...,x₍₂₎):

x₍₁₎ = 0,110345

x₍₂₎ = - 0,096552".

(x₍₁₎ und x₍₂₎ sind die Komponenten der Lösung.)

Bemerkungen:

1.

An Stelle des Symbols **"|"** kann auch das Symbol **";"** verwendet werden.

2.

Die in der Eingabezeile vorhandenen Lücken sollen die Übersicht fördern; sie sind nicht zwingend erforderlich.

3.

Mit **ENTER** unmittelbar nach Eingabe von **"GAUSS n ||"** (**n = 1,2,...,9**) wird eine "Schablone" für den Eintrag der Koeffizienten erzeugt .

Z. Bsp.: Nach Eingabe von **"GAUSS 3 ||"** ergibt sich mit **[ENTER]**:

"GAUSS 3 || || || || || || || || ||".

Mit [ENTER] unmittelbar nach Eingabe von **"GAUSS n || k"** ($n = 1, 2, \dots, 9$), ($k = 0, 1, \dots, 9$) also ohne Eingabe der Koeffizienten - generiert das Programm automatisch die Koeffizienten des Gleichungssystems, wobei die Anzahl der Nachkommastellen durch Angabe der einstelligen Zahl k ($k = 0, 1, 2, \dots, 9$) festgelegt wird.

4.

In bestimmten Fällen wird ausgegeben:

Das Gleichungssystem ist unlösbar

Z.B.: $2x + 3y = 1$
 $2x + 3y = 2$

GAUSS 2|| 2| 3| 1|| 2| 3| 2||

5.

Im "Normalfall" sind n Gleichungen mit n Unbekannten vorgegeben. Die zugehörige Matrix besteht damit aus n Zeilen mit jeweils $n+1$ Einträgen. Das Programm kann auch sogenannte "unterbestimmte" Gleichungssysteme lösen. In diesem Fall ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten. Das Gleichungssystem kann dann unendlich viele Lösungen haben.

Das Lösungsverfahren soll wieder an einem Beispiel erläutert werden. Gegeben ist ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen in 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 7z &= 1 \\ -4x + 5y + 6z &= 2 \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix lautet:

$$\begin{aligned} 3 \quad 4 \quad -7 \quad 1 \\ -4 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \end{aligned}$$

Im Textfeld "Eingabe" wird eingetragen:

GAUSS 3 || 3 | 4 | -7 | 1 || -4 | 5 | 6 | 2 ||

Ausgegeben wird:

"Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen ($x_{(1)}, \dots, x_{(3)}$)

zum Beispiel:

$$x_{(1)} = 0$$

$$x_{(2)} = 0,338983$$

$$x_{(3)} = 0,050847$$

Alle weiteren Lösungen erhält man durch Addition eines Vielfachen des Vektors $v = (v_{(1)}, \dots, v_{(3)})$:

$$v_{(1)} = 1$$

$$v_{(2)} = 0,169492$$

$$v_{(3)} = 0,525424"$$

Weiteres Beispiel siehe Bild 25 und Bild 26!

Anmerkung:

Eine nachträgliche Überprüfung, ob der ausgegebene Punkt tatsächlich eine Lösung des LGS ist, erfolgt über das Befehlsfeld „Probe“. Hierbei wird der (euklidische) Abstand des Punktes zu der durch das LGS beschriebenen Punktmenge berechnet. Bei korrekter Rechnung muss der Abstand $\leq 10^{-6}$ sein.

Die entsprechende Befehlszeile kann über das Befehlsschaltfläche „**RCL**“ (**[ALT]+[5]**) jederzeit für weitere Studien in das Textfeld „Eingabe“ kopiert werden.

Befehlsschaltfläche "Zwischenablage" (**[ALT] + [Z]**):
speichert den Text in die Zwischenablage.

Befehlsschaltfläche "Probe" (**[ALT] + [P]**):
überprüft, ob das gefundene Zahlentupel $[x_{(1)} \dots x_{(n)}]$ Lösung des Gleichungssystems ist.

Befehlsschaltfläche "OK" (**[ALT] + [O]** oder **[ENTER]**):
löscht das Textformular und blendet das Hauptformular "Termevaluator 4.3" ein.

Allgemeine Gleichung für Kegelschnitte: $A \cdot x^2 + B \cdot xy + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$

Im ebenen Koordinatensystem ist der Graph der quadratischen Gleichung mit den Variablen x und y: $A \cdot x^2 + B \cdot xy + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$ ein Kegelschnitt.

Hierbei sind A, B, C, D, E und F Konstanten, die die Art des Kegelschnitts (Ellipse - Sonderfall: Kreis -, Hyperbel, Parabel) festlegen. In Spezialfällen kann der Kegelschnitt auch zu einem sich schneidenden Geradenpaar „entarten“.

Das Programm bestimmt die Art des Kegelschnitts und analysiert seine Eigenschaften (Mittelpunkt, Lage der Achsen im Koordinatensystem, Scheitel usw.).

Man trägt die Kennung „KEGEL“ und die allgemeine Gleichung in das Textfenster „Eingabe“ ein. Mit [ENTER] erfolgt die Bearbeitung. Das Ergebnis der Analyse wird in dem Textfenster „Kegelschnitte“ ausgegeben.

Beispiel 1:

Eingabe:

KEGEL $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y - 123 = 0$

oder

KEGEL $f(x|y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y - 123 = 0$

Textfenster „Kegelschnitte“:

„Der durch die Gleichung:

$x^2 + 2 \cdot xy + 3y^2 + 4 \cdot x + 5y - 123 = 0$

beschriebene Kegelschnitt ist eine Ellipse!

Zur Vereinfachung der Beschreibung der Ellipseigenschaften wird das

Koordinatensystem um Alpha = 67,5 GRAD gedreht! Alle folgenden

Koordinatenangaben beziehen sich auf das "gedrehte" Koordinatensystem!

Einzelheiten (in Kurzfassung):

Mittelpunkt: M(-0,900666|1,521118)

Große Halbachse (parallel zur y-Achse): a = 14,731461

Kleine Halbachse (parallel zur x-Achse): b = 6,101971

Lineare Exzentrizität(Brennweite): e = 13,408277

Numerische Exzentrizität: e/a = 0,91018

1. Hauptscheitel: HS1(-0,900666|16,25258)

2. Hauptscheitel: HS2(-0,900666|-13,210343)

1. Nebenscheitel: NS1(5,201305|1,521118)

2. Nebenscheitel: NS2(-7,002637|1,521118)

1. Brennpunkt: F1(-0,900666|14,929396)

2. Brennpunkt: F2(-0,900666|-11,887159)

Ellipsengleichung (Verschiebungsform):

$(x - (-0,900666))^2 / 6,101971^2 + (y - (1,521118))^2 / 14,731461^2 = 1$

Wenn man der Eingabe das Symbol „G“ anfügt, wird der Kegelschnitt in dem Grafikfenster „**Funktionsgraph**“ dargestellt.

Voreinstellung für die Linienstärke beträgt **8**!

Wenn man eine andere Linienstärke wünscht, fügt man dem Symbol „G“ einen größeren oder kleineren Wert an (maximal **30**).

Beispiel: „KEGEL $2x^2-7y^2+20x+30y-123=0$ G**15**“

Beispiel2:

Eingabe:

KEGEL $x^2+2xy+3y^2+4x+5y-123=0$ G

oder

KEGEL $f(x|y) = x^2+2xy+3y^2+4x+5y-123=0$ G

Grafikfenster „**Funktionsgraph**“: siehe [Bild 58](#)

Häufig fehlt das „gemischte“ Glied „ $B \cdot xy$ “ in der Gleichung; in diesem Fall verlaufen die Achsen des Kegelschnitts parallel zu den Koordinatenachsen. Eine Drehung des Koordinatensystems ist dann nicht erforderlich.

Beispiel 3:

Eingabe:

KEGEL $2x^2-7y^2+20x+30y-123=0$

oder

KEGEL $f(x|y) = 2x^2-7y^2+20x+30y-123=0$

Der durch die Gleichung:

$2x^2-7y^2+20x+30y-123=0$

beschriebene Kegelschnitt ist eine Hyperbel!

Mittelpunkt: $M(-5|2,142857)$

Hyperbeläste nach "rechts" bzw. "links" geöffnet!

Reelle Halbachse (parallel zur x-Achse): $a = 8,392173$

Imaginäre Halbachse (parallel zur y-Achse): $b = 4,485805$

Lineare Exzentrizität(Brennweite): $e = 9,51583$

Numerische Exzentrizität: $\text{Epsilon} = e/a = 1,133893$

1. Scheitel: $S1(3,392173|2,142857)$

2. Scheitel: $S2(-13,392173|2,142857)$

1. Brennpunkt: $F1(4,51583|2,142857)$

2. Brennpunkt: $F2(-14,51583|2,142857)$

Hyperbelgleichung (Verschiebungsform):

$(x - (-5))^2 / 8,392173^2 - (y - (2,142857))^2 / 4,485805^2 = 1$

Beispiel 4:

Eingabe: „KEGEL $2x^2-7y^2+20x+30y-123=0$ G“

Fenster „Funktionsgraph“: siehe [Bild 59](#)

Anmerkung:

Wenn die **Linienfarbe**, **Linienstärke** oder das **Format** („x-links“, „x-rechts“, „y-unten“ oder „y-oben“) nachträglich geändert werden sollen, sind diese Änderungen im Grafikfenster „**Funktionsgraph**“ vorzunehmen; anschließend trägt man in das **Textfeld** „**f(x)**“ das Symbol „**S**“ ein und schließt mit **[ALT] + [P]** ab.

Matrixmultiplikation

Unter einer **Matrix** (Plural *Matrizen*) versteht man eine rechteckige Anordnung von Zahlen.

Z.B.: $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -0,4 \\ -8 & 9 & 55,8 \end{array}$

Man bezeichnet eine Matrix mit Großbuchstaben (z.B. „A“) und die darin auftretenden Zahlen als Elemente der Matrix mit Kleinbuchstaben (z.B. „a“). In unserem Beispiel hat die Matrix 2 Zeilen und 3 Spalten; damit ist das Matrixformat festgelegt.

Jedes Matrixelement ist durch seine Zeilennummer und seine Spaltennummer festgelegt (in unserem Beispiel: $a(\text{ZeilenNr. } 2 \mid \text{SpaltenNr. } 3) = 55,8$).

Der Eintrag einer Matrix im Textfenster "Eingabe"- wir verwenden das oben aufgeführte Beispiel - beginnt mit dem Namen der Matrix „A“

Dann wird die 1. Zeile der Matrix eingetragen; sie wird (wie auch jede folgende Zeile) mit dem Begrenzungszeichen "||" eingeleitet: Die einzelnen Elemente sind durch das Symbol "|" voneinander zu trennen:

„A||5|7 |-0,4“.

Es folgt der Eintrag der 2. Zeile. Die Eintragung wird mit "||" abgeschlossen.

„A||5 | 7 |-0,4||-8 | 9 |55,8||“

Für zwei Matrizen A und B ist eine „Multiplikation“ ($A*B$) definiert (s. Lehrbuch der linearen Algebra).

Für die Durchführung einer Multiplikation muss die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmen.

Die Matrixmultiplikation mit Hilfe des Termevaluators (Kennung: „MAT“) erläutern wir an folgendem Beispiel:

Matrix A: $\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$

Matrix B: $\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{array}$

Man trägt in das Feld „Eingabe“ ein:

„MAT*A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||“

Nach [ENTER] erscheint im Feld „Ausgabe“ die Ergebnismatrix C:

„C||19|22||43|50||“

Zusätzlich werden alle Elemente der Ergebnismatrix C und der Elemente der Matrizen in einem gesonderten Formular zusammengestellt:

„Die Elemente $c(\text{ZeilenNr}|\text{SpaltenNr})$ der Ergebnismatrix $C = A*B$:

$c(1|1) = 19$

$c(1|2) = 22$

$c(2|1) = 43$

$c(2|2) = 50$

Die Elemente $a(\text{ZeilenNr}|\text{SpaltenNr})$ der Matrix A:

$a(1|1) = 1$

$a(1|2) = 2$

$a(2|1) = 3$

$a(2|2) = 4$

Die Elemente $b(\text{ZeilenNr}|\text{SpaltenNr})$ der Matrix B:

$b(1|1) = 5$

$b(1|2) = 6$

$b(2|1) = 7$

$b(2|2) = 8$

Anmerkungen:

1.

Die Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrizen A und B dürfen 9 nicht überschreiten.

2.

Wie schon oben erwähnt müssen Spaltenanzahl von A und Zeilenanzahl von B übereinstimmen.

3.

Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor b ist als Sonderfall anzusehen, bei dem der Vektor b als einspaltige Matrix B geschrieben wird.

Eingabe: „**MAT*A||1|2||3|4|| B||5||7||**“

Ausgabe: „**C ||19||43||**“

4.

Die „Ergebnismatrix“ C kann – wie alle anderen Ergebnisse – mit **[ALT] + [1]** gespeichert und mit **[ALT] + [2]** für weitere Rechnungen wieder eingefügt werden;

dabei ist der Anfangsbuchstabe „C“ durch „A“ bzw. „B“ zu ersetzen.

5.

An Stelle des Trennungszeichens „|“ kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon „;“ verwendet werden !

6.

Die Eingabe der Matrizen A und B erfordert besondere Sorgfalt, da andernfalls eine Fehlermeldung erfolgt.

Hierzu kann das Hilfsprogramm „**FMAT**“ verwendet werden.

Schritt 1: (Matrixformat)

Eingabe der Kennung: „**FMAT**“ oder „**FMAT***“

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: „**FMAT*| | |**“

Schritt 2:

Eingabe der Spaltenanzahlen von A und B durch das Symbol „|“ voneinander getrennt - in unserem Beispiel: „**FMAT*|2|2|**“

Schritt 3: (Matrixformat)

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld:

„**FMAT*A(ZeilAnz: 2|SpalAnz: 2) B(ZeilAnz: 2|SpalAnz: 2)**“

Hier können noch Korrekturen an den Zeilen- und Spaltenanzahlen vorgenommen werden.

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: :

„MAT*A|| | || | || B|| | || | ||“

In diesem Raster sind die Elemente der Matrizen A und B einzutragen:

„MAT*A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||“

Für Demonstrationszwecke kann man die Eintragung „automatisieren“, indem die Eingabe **„MAT*A|| | || | || B|| | || | ||“** durch eine der Ziffern **0,1,...,9** ergänzt wird:

z.B.: **„MAT*A|| | || | || B|| | || | ||3“**

In diesem Beispiel werden nach **[ENTER]** in die „Zellen“ Zufallszahlen mit 3 Nachkommastellen eingefügt:

MAT*A||-2,77|-2,83||3,959|1,592|| B||-1,015|2,854||-3,971|-1,495||

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** wird die Multiplikation ausgeführt (s. o.).

Matrixaddition / -subtraktion

Die Darstellung einer Matrix in den einzeiligen Feldern „Eingabe“ und „Ausgabe“ ist im vorherigen Abschnitt „Matrixmultiplikation“ erläutert worden. Für zwei Matrizen A und B sind eine „Addition“ ($A+B$) und eine „Subtraktion“ ($A-B$) definiert (s. Lehrbuch der linearen Algebra).

Für die Durchführung einer Addition / Subtraktion müssen Spaltenanzahl und Zeilenanzahl von A und B übereinstimmen.

Die Matrixaddition / -subtraktion mit Hilfe des Termevaluators (Kennung: „**MAT+**“ / „**MAT-**“) erläutern wir an folgendem Beispiel:

Matrix A: 1 | 2
 3 | 4
Matrix B: 5 | 6
 7 | 8

Man trägt in das Feld „Eingabe“ ein

bei der Addition: „**MAT+A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||**“,

bei der Subtraktion: „**MAT-A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||**“.

Nach **[ENTER]** erscheint im Feld „Ausgabe“ die Ergebnismatrix C

bei der Addition: „**C ||6|8||10|12||**“,

bei der Subtraktion: „**C||-4|-4||-4|-4||**“.

Zusätzlich werden alle Elemente der Ergebnismatrix C und der Elemente der Matrizen in einem gesonderten Formular zusammengestellt

bei der Addition:

Die Elemente c(ZeilenNr|SpaltenNr) der Ergebnismatrix C = A+B:

$$c(1|1) = 6$$

$$c(1|2) = 8$$

$$c(2|1) = 10$$

$$c(2|2) = 12$$

Die Elemente a(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix A:

$$a(1|1) = 1$$

$$a(1|2) = 2$$

$$a(2|1) = 3$$

$$a(2|2) = 4$$

Die Elemente b(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix B:

$$b(1|1) = 5$$

$$b(1|2) = 6$$

$$b(2|1) = 7$$

$$b(2|2) = 8$$

bei der Subtraktion:

Die Elemente c(ZeilenNr|SpaltenNr) der Ergebnismatrix C = A-B:

$$c(1|1) = -4$$

$$c(1|2) = -4$$

$$c(2|1) = -4$$

$$c(2|2) = -4$$

Die Elemente a(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix A:

$$a(1|1) = 1$$

$$a(1|2) = 2$$

$$a(2|1) = 3$$

$$a(2|2) = 4$$

Die Elemente b(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix B:

$$b(1|1) = 5$$

$$b(1|2) = 6$$

$$b(2|1) = 7$$

$$b(2|2) = 8$$

Anmerkungen:

1.

Die Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrizen A und B dürfen 9 nicht überschreiten.

2.

Wie schon oben erwähnt müssen Spalten-/Zeilenanzahl von A und B übereinstimmen.

3.

Die „Ergebnismatrix“ C kann – wie alle anderen Ergebnisse – mit **[ALT] + [1]** gespeichert und mit **[ALT] + [2]** für weitere Rechnungen wieder eingefügt werden; dabei ist der Anfangsbuchstabe „**C**“ durch „**A**“ bzw. „**B**“ zu ersetzen.

4.

An Stelle des Trennungszeichens „|“ kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon „;“ verwendet werden !

5.

Die Eingabe der Matrizen A und B erfordert besondere Sorgfalt, da andernfalls eine Fehlermeldung erfolgt.

Hierzu kann das Hilfsprogramm „**FMAT+/-**“ verwendet werden:

Schritt 1: (Matrixformat)

Eingabe der Kennung: „**FMAT+**“ bzw. „**FMAT-**“.

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: „**FMAT+| | |**“ bzw.

„**FMAT-| | |**“.

Schritt 2:

Eingabe der Spalten- und Zeilenanzahl von A durch das Symbol „|“ voneinander getrennt - in unserem Beispiel: „**FMAT+|2|2|**“ bzw. „**FMAT-|2|2|**“

Schritt 3: (Matrixformat)

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld:

„**FMAT+/-A(ZeilAnz: 2|SpalAnz: 2) B(ZeilAnz: 2|SpalAnz: 2)**“

Hier können noch Korrekturen an den Zeilen- und Spaltenanzahlen vorgenommen werden.

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld :

„**MAT+A|| | | | B|| | | |**“ bzw. „**MAT-A|| | | | B|| | | |**“

In diesem Raster sind die Elemente der Matrizen A und B einzutragen:

„**MAT+A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||**“ bzw. „**MAT-A||1|2||3|4|| B||5|6||7|8||**“

Zu Demonstrationszwecken kann man die Eintragung „automatisieren“, indem die Eingabe „**MAT+A**|| || || **B**|| || ||“ bzw. „**MAT+A**|| || || **B**|| || ||“ durch eine der Ziffern **0,1,...,9** ergänzt wird:

z.B.: „**MAT+A**|| || || **B**|| || ||**3**“ bzw. „**MAT-A**|| || || **B**|| || ||**3**“

In diesem Beispiel werden nach **[ENTER]** in die „Zellen“ Zufallszahlen mit 3 Nachkommastellen eingefügt:

MAT A+||-2,77|-2,83||3,959|1,592|| B||-1,015|2,854||-3,971|-1,495||

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** wird die Addition/Subtraktion ausgeführt (s. o.).

Matrixpotenz

Die Darstellung einer Matrix in den einzelnen Feldern „Eingabe“ und „Ausgabe“ ist im Abschnitt „Matrixmultiplikation“ erläutert worden.

Das Potenzieren mit dem Exponenten „3“ wird an dem Beispiel der Matrix **A**||1|2||3|4|| beschrieben:

Die Kennung für eine Matrixpotenz lautet: „**PMAT**|“; es schließt sich der Exponent mit der Kennzeichnung „**E**“ an; es folgt die Darstellung der Matrix **A**:

Eingabe: „**PMAT|E3|A**||1|2||3|4||“

[**ENTER**]

Ausgabe: „**C** ||37|54||81|118||“

Zusätzlich werden alle Elemente der Ergebnismatrix C und der Matrix A in einem gesonderten Formular zusammengestellt:

„**Die Elemente c(ZeilenNr|SpaltenNr) der Ergebnismatrix C = A^3:**

c(1|1) = 37

c(1|2) = 54

c(2|1) = 81

c(2|2) = 118

Die Elemente a(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix A:

a(1|1) = 1

a(1|2) = 2

a(2|1) = 3

a(2|2) = 4”

Anmerkungen:

1.

Für das Potenzieren der Matrix A müssen Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen („Quadratmatrix“).

2.

Die Zeilenanzahl von A darf 9 nicht überschreiten!

3.

An Stelle des Trennungszeichens „|“ kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon „;“ verwendet werden!

4.

Die „Ergebnismatrix“ C kann – wie alle anderen Ergebnisse – mit [**ALT**] + [**1**] gespeichert und mit [**ALT**] + [**2**] für weitere Rechnungen wieder eingefügt werden;

dabei ist die Bezeichnung „**C**“ durch „**A**“ bzw. „**B**“ zu ersetzen.

5.

Die Eingabe erfordert besondere Sorgfalt, da andernfalls eine Fehlermeldung erfolgt.

Um Fehler zu vermeiden, kann man schrittweise vorgehen:

Schritt 1:

Eingabe der Kennung: „**PMAT**“.

Nach [**ENTER**] erscheint im Eingabefeld:

„**PMAT|E2|A**||“

Hier kann man (wie oben geschehen) die Voreinstellung „2“ durch einen anderen Wert – in unserem Beispiel „3“ - ersetzen.

„**PMAT|E3|A||**“

Schritt 2:

Man fügt die Zeilenanzahl der Matrix A an:

„**PMAT|E3|A||2**“

Schritt 3:

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: :

„**PMAT|E3| A| | | |**“

In diesem Raster sind die Elemente der Matrizen A einzutragen:

„**PMAT|E3|A||1|2||3|4||**“

Für Demonstrationszwecke kann man die Eintragung „automatisieren“, indem die Eintragung „**PMAT|E3| A| | | |**“ durch eine der Ziffern **0,1,...,9** ergänzt wird:

z.B.: „**PMAT|E3| A| | | |4**“

In diesem Fall werden nach **[ENTER]** in die „Zellen“ Zufallszahlen mit 4 Nachkommastellen eingefügt:

„**PMAT|E3| A|-1,4180|-2,1637||-4,1461|-0,5892||**“

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** wird die Matrix potenziert (s. o.).

Matrixinvertierung

Die Darstellung einer Matrix in den einzeiligen Feldern „Eingabe“ und „Ausgabe“ ist im Abschnitt „Matrixmultiplikation“ erläutert worden.

Die **inverse Matrix** oder kurz **Inverse** einer quadratischen Matrix ist eine ebenfalls quadratische Matrix, die mit der Ausgangsmatrix multipliziert die **Einheitsmatrix** ergibt. (s. hierzu Lehrbuch der linearen Algebra !)

Die inverse Matrix kennzeichnen wir mit „**AI**“, ihre Elemente mit „**ai(ZeilenNr. | SpaltenNr.)**“.

Die **Invertierung** wird an dem Beispiel der Matrix **A**||1|2||3|4|| beschrieben:
Die Kennung für eine Invertierung lautet: „**IMAT**“; es folgt die Darstellung der Matrix **A**:

Eingabe: „**IMAT**|**A**||1|2||3|4||“
[ENTER]

Ausgabe: „**AI** ||-2|1||1,5|-0,5||“

Zusätzlich werden alle Elemente der inversen Matrix **AI** und zur Kontrolle die Elemente der Matrix **A** in einem gesonderten Formular zusammengestellt:

“Die Elemente **ai(ZeilenNr|SpaltenNr)** der inversen Matrix "AI" :

ai(1|1) = -2

ai(1|2) = 1

ai(2|1) = 1,5

ai(2|2) = -0,5

Die Elemente **a(ZeilenNr|SpaltenNr)** der Matrix "A":

a(1|1) = 1

a(1|2) = 2

a(2|1) = 3

a(2|2) = 4

Anmerkungen:

1.

Für das Invertieren der Matrix A müssen Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen („Quadratische Matrix“).

2.

Die Zeilenanzahl von A darf 9 nicht überschreiten!

3.

An Stelle des Trennungszeichens "|" kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon ";" verwendet werden!

4.

Die inverse Matrix „**AI**“ kann – wie alle anderen Ergebnisse – mit [ALT] + [1] gespeichert und mit [ALT] + [2] für weitere Rechnungen wieder eingefügt werden; dabei ist die Bezeichnung „**C**“ durch „**A**“ bzw. „**B**“ zu ersetzen.

5.

Die Eingabe erfordert besondere Sorgfalt, da andernfalls eine Fehlermeldung erfolgt.

Um Fehler zu vermeiden, kann man schrittweise vorgehen:

Schritt 1:

Eingabe der Kennung: „**IMAT**“.

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld:

„**IMAT|A|**“

Schritt 2:

Man fügt die Zeilenanzahl der Matrix A an:

„**IMAT|A||2**“

Schritt 3:

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: :

„**IMAT|A|| | | |**“

In diesem Raster sind die Elemente der Matrizen A einzutragen:

„**IMAT|A||1|2||3|4|**“

Für Demonstrationszwecke kann man die Eintragung „automatisieren“, indem man die Eintragung „**IMAT|A|| | | |**“ durch eine der Ziffern **0,1,...,9** ergänzt:
z.B.: „**IMAT|A|| | | |4**“

In diesem Fall werden nach **[ENTER]** in die „Zellen“ Zufallszahlen mit 4 Nachkommastellen eingefügt:

„**IMAT|A||-1,4180|-2,1637||-4,1461|-0,5892|**“

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** wird die Matrix A invertiert (s. o.).

Skalares Vielfache einer Matrix

Die Darstellung einer Matrix in den einzelnen Feldern „Eingabe“ und „Ausgabe“ ist im Abschnitt „Matrixmultiplikation“ erläutert worden.

Die **Multiplikation einer Matrix A mit einem Skalar s** wird an dem Beispiel der Matrix **A**||1|2||3|4|| und dem Skalar **s = 3,1** beschrieben:

Die Kennung hierfür lautet: „**SMAT**“; es folgt der Faktor **s** und die Matrix **A**.

Eingabe: „**SMAT**|3,1|***A**||1|2||3|4||“ alternativ: „**SMAT 3,1A**||1|2||3|4||“
[ENTER]

Ausgabe: „**C**||3,1|6,2||9,3|12,4||“

Speicherung von Matrizen

Matrizen können in der Form „|| |...|| |...||.....||“ (als String) an 9 verschiedenen Orten mit den Bezeichnungen **m1**, **m2**,... **m9** gespeichert werden.

Speicherbefehle :

1. Direkte Speicherung einer Matrix in **m3**

MAT m3 = || |...|| |...||.....||

2. Kopieren des Speicherinhaltes von **m4** in den Speicher **m3**

MAT m3 = m4

- 3.

Vor einer Rechenoperation lassen sich die Matrizen A (und B) für die weitere Verwendung abspeichern:

Beispiele:

MAT+A||1|2||3|4||B||5|6||7|8||m3m5

Die **Matrix A** wird in **m3** und die **Matrix B** in **m5** nach **[ENTER]** abgespeichert.

IMAT+A||1|2||3|4|| m3

Die **Matrix A** wird in **m3** nach **[ENTER]** abgespeichert

- 4.

Nach jeder Rechenoperation mit Matrizen wird das Resultat in **m0** abgespeichert. Der Inhalt dieses Speichers kann anschließend in einen der Speicher **m1**,...,**m9** kopiert werden: z. B. **MAT m3 = m0**.

Rechnen mit gespeicherten Matrizen

Speicherbefehle :

1. **MAT* m1m3**
Multiplikation des Speicherinhalts **m1** und des Speicherinhalts **m3**.
nach 2-maligem **[ENTER]**.
2. **MAT+ m1m3**
Addition des Speicherinhalts **m1** und des Speicherinhalts **m3**.
nach 2-maligem **[ENTER]**.
3. **PMAT|E2| m3**
Quadrieren des Speicherinhalts **m3** nach 2-maligem **[ENTER]**.
4. **IMAT m3**
Invertieren des Speicherinhalts **m3** nach 2-maligem **[ENTER]**.

Nach jeder Rechenoperation mit Matrizen wird das Resultat in **m0** abgespeichert. Der Inhalt des Speichers **m0** kann in einen der Speicher **m1,...,m9** kopiert werden.

Anzeigen und Ändern von Matrizen

Speicherbefehle :

1. **MAT m1**

Anzeigen des Speichers **m1** nach **[ENTER]**:

MAT m1 = || | | || | | || | |

2. Jetzt können Matrixelemente durch andere ersetzt werden.
Nach **[ENTER]** wird die geänderte Matrix in **m1** gespeichert.

Determinantenberechnung

Die **Determinante** ist eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix einen Zahlenwert zuordnet. (Näheres hierzu s. Lehrbuch der Linearen Algebra !). Der zugeordnete Zahlenwert wird mit **det(A)** bezeichnet.

Die **Berechnung von det(A)** wird an dem Beispiel der Matrix **A||1|2||3|4||** beschrieben:

Nach der Eingabe des Kennwortes „**DET**“ und **[ENTER]** erscheint im Textfeld „Eingabe“: „**DET |A||**“. Es sind die Elemente der Matrix A einzutragen:

Eingabe: „**DET|A||1|2||3|4||**“

[ENTER]

Ausgabe: „**Determinante det(A) = -2**“

Anmerkungen:

1.

Für die Berechnung von **det(A)** müssen Zeilen- und Spaltenanzahl von A übereinstimmen („Quadratische Matrix“).

2.

Die Zeilen/Spaltenanzahl von A darf 9 nicht überschreiten!

3.

An Stelle des Trennungszeichens "|" kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon ";" verwendet werden!

4.

det(A) kann – wie alle anderen Ergebnisse – mit **[ALT] + [1]** gespeichert und mit **[ALT] + [2]** für weitere Rechnungen wieder eingefügt werden.

5.

Die Eingabe erfordert besondere Sorgfalt, da andernfalls eine Fehlermeldung erfolgt.

Um Fehler zu vermeiden, kann man schrittweise vorgehen:

Schritt 1:

Eingabe der Kennung: „**DET**“.

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld(s.o.):

„**DET|A||**“

Schritt 2:

Man fügt die Zeilen/Spaltenanzahl der Matrix A an:

„**DET|A||2**“

Schritt 3:

Nach **[ENTER]** erscheint im Eingabefeld: :

„**DET|A|| | | | |**“

In diesem Raster sind die Elemente der Matrizen A einzutragen:

„**DET|A||1|2||3|4||**“

Zu Demonstrationszwecken kann die Eintragung „automatisiert“ werden, indem man die Eintragung „**DET|A|** | | | |“ durch eine der Ziffern **0,1,...,9** ergänzt:

z.B.: „**DET|A|** | | | |**4**“

In diesem Fall werden nach **[ENTER]** in die „Zellen“ Zufallszahlen mit 4 Nachkommastellen eingefügt:

„**DET|A|**-1,4180|-2,1637|-4,1461|-0,5892|“

Schritt 4:

Nach **[ENTER]** wird **det(A)** berechnet (s. o.).

Eigenwerte / Eigenvektoren

Eine Zahl „lambda“ heißt Eigenwert einer (quadratischen) Matrix A, wenn es einen Vektor v gibt mit der Eigenschaft: $A * v = \lambda * v$.
(Hierbei ist v als einspaltige Matrix und $A*v$ als Matrixprodukt anzusehen.)
 v wird dann Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert lambda genannt.
Das Programm berechnet

A)

für **beliebige 2- oder 3-zeilige quadratische Matrizen** mit reellen Einträgen
alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

Kennung: **EIGEN**

Eigenwerte und Eigenvektoren können reell oder komplex sein.

Mit einem Eigenvektor ist auch jedes Vielfache Eigenvektor. Als Ergebnis wird jeder Eigenvektor so gestreckt (gestaucht), dass eine Vektorkomponente den Wert 1 hat.

Die Eigenvektoren werden mit der euklidischen Norm 1 angezeigt, wenn vor der Auswertung die Eingabe um den Buchstaben „E“ erweitert wird .

(Beispiel: „EIGEN A ||4,2|3||-33|9||E“)

B)

für **symmetrische Matrizen mit maximal 9 Zeilen/Spalten und reellen Einträgen** **alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.**

Eine Matrix A heißt symmetrisch, wenn bei einer Spiegelung aller Matrixelemente $a(i|k)$ an der Hauptdiagonalen - bestehend aus den Elementen $a(i|i)$ - Matrix A und Bildmatrix A' übereinstimmen; es gilt dann: $a(i|k) = a(k|i)$ für alle Indexpaare $(k|i)$.

Kennung: **EIGSYM**

Eigenwerte und Eigenvektoren sind in diesem Fall reell.

Mit einem Eigenvektor ist auch jedes Vielfache Eigenvektor. Als Ergebnis wird jeder Eigenvektor so gestreckt (gestaucht), dass eine Vektorkomponente den Wert 1 hat.

Die Eigenvektoren werden mit der euklidischen Norm 1 angezeigt, wenn vor der Auswertung die Eingabe um den Buchstaben „E“ erweitert wird .

Zu A):

Im Fenster „Eingabe“ ist nach der Kennung „**EIGEN**“ **die Zeilenanzahl (n=2 oder n=3)** einzutragen.

Nach **[ENTER]** wird ein Raster ausgegeben, in das die Matrixelemente $a(i|k)$ einzutragen sind.

Wenn man dem Raster eine Ziffer n anfügt (z.B. „**EIGEN A**|| || || ||**2**“), werden zusätzlich mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators Zahlen mit n Nachkommastellen eingefügt.

Beispiel I:

„EIGEN2“

[ENTER]

„EIGEN A|| | || | ||“

(Eingabe der Elemente der Matrix A)

„EIGEN A||1|2||3|4||“

Nach [ENTER] werden in einem gesonderten Textfeld Eigenwerte und Eigenvektoren und zur nochmaligen Kontrolle die Elemente der Matrix A ausgegeben.

Ausgabe:

„Eigenwerte lambda und Eigenvektoren v der Matrix A:

Eigenwert lambda1 = 5,372281

Eigenvektor v1:

v1_1 = 0,415974

v1_2 = 0,909377

Eigenwert lambda2 = -0,372281

Eigenvektor v2:

v2_1 = 0,824565

v2_2 = -0,565767

Elemente a(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix A:

a(1|1) = 1

a(1|2) = 2

a(2|1) = 3

a(2|2) = 4“

Beispiel II:

Eingabe:

„EIGEN A||1|-2||3|4||“

[ENTER]

Ausgabe:

„Eigenwerte lambda und Eigenvektoren v der Matrix A:

Eigenwert lambda1 = (2.5+1.9364916731i)

Eigenvektor v1:

v1_1 = (-0.5+0.6454972244i)

v1_2 = (1)

Eigenwert lambda2 = (2.5-1.9364916731i)

Eigenvektor v2:

v2_1 = (-0.5-0.6454972244i)

v2_2 = (1)

Elemente a(ZeilenNr|SpaltenNr) der Matrix A:

a(1|1) = 1

a(1|2) = -2

a(2|1) = 3

a(2|2) = 4“

Beispiel III:

Eingabe:

„EIGEN A||1|-2||3|4||E“
[ENTER]

Ausgabe:

„Eigenwerte lambda und Eigenvektoren v der Matrix A:

Eigenwert lambda1 = (2.5+1.9364916731i)

Eigenvektor v1:

v1_1 = (-0.3872983346+0.5i)

v1_2 = (0.7745966692)

Eigenwert lambda2 = (2.5-1.9364916731i)

Eigenvektor v2:

v2_1 = (-0.3872983346-0.5i)

v2_2 = (0.7745966692)“

Zu B)

Im Fenster „Eingabe“ ist nach der Kennung „EIGSYM“ die Zeilenanzahl n ($2 \leq n \leq 9$) einzutragen (z.B.: „EIGSYM3“).

Nach [ENTER] wird ein Raster ausgegeben, in das die Matrixelemente a(i|k) eingegeben werden.

Wenn man dem Raster eine Ziffer n anfügt (z.B. „EIGSYM A|| | || | || | | ||“), werden zusätzlich mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators Zahlen mit n Nachkommastellen eingefügt.

Die Eigenvektoren werden mit der euklidischen Norm 1 angezeigt, wenn vor der Auswertung die Eingabe um den Buchstaben „E“ erweitert wird .

Beispiel IV:

„EIGSYM3“

[ENTER]

„EIGSYM A || | | || | | || | | ||“

(Eingabe der Elemente der Matrix A)

EIGSYM A ||-9,4|-2,7|-8,1||-2,7|4,7|0,1||-8,1|0,1|3,8||

Nach [ENTER] werden in einem gesonderten Textfeld Eigenwerte und Eigenvektoren und zur nochmaligen Kontrolle die Elemente der Matrix A ausgegeben.

„Eigenwerte lambda und Eigenvektoren v der Matrix A:

Eigenwert lambda1 = -13,5639937242

Eigenvektor v1:

v1_1 = 2,1475548023

v1_2 = 0,3120017479

v1_3 = 1

Eigenwert lambda2 = 8,1402703101

Eigenvektor v2:

v2_1 = -0,5303384483

v2_2 = 0,4452887919

v2_3 = 1

Eigenwert $\lambda_3 = 4,5237234142$

Eigenvektor v_3 :

$v_{3_1} = -0,1188207797$

$v_{3_2} = -2,3872490104$

$v_{3_3} = 1$

Elemente $a(\text{ZeilenNr}|\text{SpaltenNr})$ der Matrix A:

$a(1|1) = -9,4$

$a(1|2) = -2,7$

$a(1|3) = -8,1$

$a(2|1) = -2,7$

$a(2|2) = 4,7$

$a(2|3) = 0,1$

$a(3|1) = -8,1$

$a(3|2) = 0,1$

$a(3|3) = 3,8$

Beispiel V:

(Eingabe der Elemente der Matrix A)

EIGSYM A ||-9,4|-2,7|-8,1||-2,7|4,7|0,1||-8,1|0,1|3,8||E
[ENTER]

Ausgabe:

Eigenwerte λ und Eigenvektoren v der Matrix A:

Eigenwert $\lambda_1 = -13,5639937242$

Eigenvektor v_1 :

$v_{1_1} = 0,8987759165$

$v_{1_2} = 0,130576252$

$v_{1_3} = 0,4185112834$

Eigenwert $\lambda_2 = 8,1402703101$

Eigenvektor v_2 :

$v_{2_1} = 0,4360031376$

$v_{2_2} = -0,3660819068$

$v_{2_3} = -0,8221224371$

Eigenwert $\lambda_3 = 4,5237234142$

Eigenvektor v_3 :

$v_{3_1} = 0,0458597422$

$v_{3_2} = 0,9213760795$

$v_{3_3} = -0,3859572569$

Lineare Optimierung

Die **Lineare Optimierung** oder **Lineare Programmierung** beschäftigt sich mit der Bestimmung des Maximums / Minimums einer linearen Zielfunktion **Z** (in mehreren Variablen) über einer Menge **M**, die durch Nebenbedingungen (Restriktionen) in Form von linearen Gleichungen oder Ungleichungen beschrieben wird. Zusätzlich sollen alle Punkte von **M** Koordinaten haben, die größer oder gleich 0 sind ("**Nichtnegativitätsbedingung**").

Dies wird an einem Beispiel einer Zielfunktion in 2 Variablen mit 3 Nebenbedingungen erläutert:

Die **Zielfunktion Z** besitzt die Gleichung: $z = 3x - 2y$.

Die **Nebenbedingungen** lauten:

1. $-1 \cdot x + 1 \cdot y \leq 0$
2. $1 \cdot y \leq 10$
3. $-0,6 \cdot x + 1 \cdot y \geq 0,4$

Jede dieser 3 Ungleichungen beschreibt eine Halbebene im 2-dimensionalen Koordinatensystem. Die Schnittmenge der 3 Halbebenen ist eine Dreiecksfläche mit den Eckpunkten (1 | 1), (16 | 10) und (10 | 10)

(siehe auch **Bild 37**).

Die mathematische Theorie besagt nun, dass die Zielfunktion ihr Maximum (**Z_max**) / Minimum (**Z_min**) an einem der Eckpunkte annimmt. In unserem Fall sind die optimalen Punkte **X_max** (**X_min**) leicht durch Einsetzen der Eckpunktskoordinaten in die Gleichung der Zielfunktion zu bestimmen.

Wesentlich komplizierter wird die Suche der optimalen Punkte, wenn die Anzahl der Nebenbedingungen groß ist. (Wenn z.B. 20 Nebenbedingungen vorliegen, gibt es bereits 190 Schnittpunkte, sofern die zugehörigen Geraden paarweise nicht parallel zueinander sind. Zusätzlich werden u. U.

Schnittpunkte außerhalb der beschriebenen Schnittmenge **M** liegen.)

Das vorliegende Programm ermittelt den optimalen Punkt **X_max** (**X_min**) mit Hilfe des Simplex-Verfahrens, das von dem US-amerikanischen Mathematiker G. Dantzig 1947 entwickelt wurde.

Mit der Kennung "**LOP**" im Textfenster "Eingabe" und **[ENTER]** (alternativ: Tastenkombination **[STRG] + [O]**) erscheint im Textfenster "Eingabe":

"LOP AnzVAR |AnzNB |".

In die Lücke hinter **AnzVAR** (Anzahl der Variablen) trägt man in unserem Beispiel **"2"**, hinter **AnzNB** (Anzahl der Nebenbedingungen) **"3"** ein.

"LOP AnzVAR 2 |AnzNB 3 |".

Nach einem nochmaligen **[ENTER]** erhält man eine "Schablone" für das Eintragen der Koeffizienten der Zielfunktion **MAX MIN Z=|| | ||** und der Ungleichungen **KoeffNB|| | | || |**, wobei auch die rechte Seite der Ungleichungen zu berücksichtigen ist.

"LOPAnzVAR 2|AnzNB 3| MAX MIN Z=|| | ||KoeffNB|| | | || | | || | | ||"

Vor der Eintragung sind folgende Vorbereitungen zu treffen:

I)

Alle ">=" -Ungleichungen sind durch Multiplikation beider Seiten mit (-1) in äquivalente "<=" -Ungleichungen umzuformen.

In unserem Beispiel ist die 3. Nebenbedingung entsprechend umzuformen. " $-0,6 \cdot x + 1 \cdot y \geq 0,4$ " wird zu " $0,6 \cdot x - 1 \cdot y \leq -0,4$ " umgeformt.

II)

Fehlen in den Nebenbedingungen bestimmte Variablen, so sind die zugehörigen Koeffizienten = 0 zu setzen.

In unserem Beispiel wird die 2. Nebenbedingung " $1 \cdot y \leq 10$ " zu " $0 \cdot x + 1 \cdot y \leq 10$ " erweitert.

Zusammengefasst erhalten wir in unserem Beispiel:

Zielfunktion:

" $z = 3x - 2y$ "

Nebenbedingungen:

1. " $-1 \cdot x + 1 \cdot y \leq 0$ "
2. " $0 \cdot x + 1 \cdot y \leq 10$ "
3. " $0,6 \cdot x - 1 \cdot y \leq -0,4$ "

und nach der Eintragung der Koeffizienten in die "Schablone" (Textfeld "Eingabe"):

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 3|MAXMIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||0,6|-1|-0,4||"

Mit [ENTER] berechnet das Programm den maximalen Wert **Z_max** und den zugehörigen optimalen Punkt **X_max**.

Die Daten erscheinen im Textfeld "Ausgabe" und zusätzlich aufgrund ihres Umfangs in einem zusätzlich geöffneten Formular.

"Z_max = 28 | X_max = (16 | 10)" (siehe Bild 38).

Für die Bestimmung des minimalen Wertes **Z_min** ist der Term "**MAX**" zu löschen:

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 3|MIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||0,6|-1|-0,4||"

Nach [ENTER] erscheint (Ausgabe):

"Z_min = 1 | X_min = (1 | 1)" (siehe Bild 37).

Anmerkungen

1.)

Es können bis zu 50 Variable und 50 Nebenbedingungen eingegeben werden.

2.)

Eine Gleichung als Nebenbedingung muss in ein äquivalentes System von Ungleichungen umgeschrieben werden.

In unserem obigen Beispiel soll als weitere Nebenbedingung die Gleichung " $-x + 2y = 8$ " hinzukommen. (siehe Bild 37).

Diese Gleichung wird in ein dazu äquivalentes Ungleichungssystem umgewandelt:

$$"-x + 2y \leq 8" \text{ und } "-x + 2y \geq 8"$$

Da in der "Eingabe"-Zeile nur "**<=Ungleichungen**" auftreten dürfen, ist die 2. Ungleichung in die dazu äquivalente Ungleichung " $x - 2y \leq -8$ " umzuformen:

$$4. \quad "-x + 2y \leq 8"$$

$$5. \quad "x - 2y \leq -8"$$

Berechnung von Z_max:

Eingabe:

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 5|

MAXMIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||0,6|-1|-0,4||-1|2|8||1|-2|-8||"

[ENTER]

Ausgabe:

"Z_max = 16 | X_max = (12 | 10)"

Berechnung von Z_min:

Eingabe:

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 5|

MIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||0,6|-1|-0,4||-1|2|8||1|-2|-8||"

[ENTER]

Ausgabe:

"Z_min = 8 | X_min = (8 | 8)"

3.)

Enthält die Gleichung der Zielfunktion einen konstanten Summanden, so ist dieser in einer zusätzlich einzurichtenden Zelle einzufügen.

Beispiel: Gleichung der Zielfunktion: $z = 3x - 2y - 10,345$

Eingabe: MAXMIN Z = ||3|-2|-10,345||

4.)

Bei bestimmten Kombinationen von Ungleichungen ist die dadurch beschriebene Schnittmenge und damit die Zielfunktion unbeschränkt.

Dieser Fall tritt in unserem Beispiel ein, wenn die Schnittmenge nur durch die ersten beiden Ungleichungen festgelegt wird.

$$1. \quad "-1*x + 1*y \leq 0"$$

$$2. \quad "0*x + 1*y \leq 10"$$

Eingabe:

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 2|MAXMIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||"

[ENTER]

Ausgabe:

"Zielfunktion nach oben unbeschränkt !"

5.)

Andererseits kann die Schnittmenge auch leer sein.

Die Ungleichungen:

1. $-x + y \leq 0$

und

2. $2x - y \leq -3$

beschreiben zwei Halbebenen, die sich nur im 3. Quadranten überschneiden. Auf Grund der geforderten Nichtnegativitätsbedingung für die Koordinaten existieren keine gemeinsamen Punkte (im 1. Quadranten).

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 2|MAXMIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||2|-1|-3||"

[ENTER]

"Aufgabe unlösbar (Lösungsmenge leer)"

6.)

Eingabe:

"LOP AnzVAR n |AnzNB k | d "**Das Programm generiert automatisch mit [ENTER] die Koeffizienten der Nebenbedingungen als Zufallszahlen,**wenn man zuvor die Anzahl der Variablen: n (n=2,...50), die Anzahl der Nebenbedingungen: k (k = 1,...,50) und eine weitere Zahl d (d = 0,1,...,9), die die Anzahl der Nachkommastellen der Koeffizienten festlegt, eingibt.**Die Koeffizienten der Zielfunktion werden = 1 gesetzt.****Beispiel:**

Eingabe:

"LOP AnzVAR 2 |AnzNB 3 | 0 "**[ENTER]**

Eingabe:

LOPAnzVAR2|AnzNB3|MAXMINZ=||1|1||KoeffNB||15|49|218||60|38|63||21|49|60||**[ENTER]**

Ausgabe:

"Z_max = 1,439776 | X_max = (0,376751 | 1,063025)"

Für eine fundierte Einarbeitung in das Thema: "Lineare Optimierung" wird das Studium der einschlägigen Literatur

z.B.

Heinrich Rommelfanger
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II
Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

empfohlen.

Lote auf Geraden und (Hyper)Ebenen

Das Programm berechnet Fußpunkt und Länge eines Lotes, das von einem Punkt L auf eine Gerade oder (Hyper)Ebene gefällt wird.

Mit dem Eintrag "**LOT**" in das Textfenster "Eingabe" und **[ENTER]** (Tastenkombination: **[STRG] + [L]**) erhält man: "**LOT n ||L**" (n = Dimension des Raumes).

Mit **[ENTER]** unmittelbar nach Eintrag von n (n = 1,2,...,9) in "**LOT n ||L**" wird eine "Schablone" für den Eintrag der Koordinaten des Lotpunktes L und der Koeffizienten von n-1 (Hyper)Ebenengleichungen erzeugt:

Beispiel (n = 3) "**LOT 3 ||L | | | | | | | | | | | | | |**".

Man trägt die n Koordinaten des Punktes L, von dem das Lot zu fällen ist, und die Koeffizienten der (Hyper)Ebenengleichungen ein. **Die Anzahl der (Hyper) Ebenengleichungen kann zwischen 1 und n liegen. Das Lot wird auf die Schnittmenge der durch die Gleichungen festgelegten (Hyper)Ebenen gefällt. Die nicht benötigten Felder der Schablone müssen gelöscht werden.**

Nach **[ENTER]** werden die Koordinaten des Fußpunktes und die Länge des Lotes ausgegeben.

1. Beispiel:

"Lot von Punkt L(0 | 0) auf die Gerade g: $6x + 8y = 120$ "

Eingabe:

LOT 2||L0|0||6|8|120||

Ausgabe:

Koordinaten des Lotpunktes L :

$l_{(1)} = 0$

$l_{(2)} = 0$

Koordinaten des Lotfußpunktes X :

$x_{(1)} = 7,2$

$x_{(2)} = 9,6$

Lotlänge LX: 12

2. Beispiel:

"Lot von Punkt L(1 | 2 | 3) auf die Ebene g: $7x + 8y - 3z = -4$ " im 3-dimensionalen Raum:

Eingabe:

LOT 3||L1|2|3||7|8|-3|-4||

Ausgabe:

Koordinaten des Lotpunktes L :

$l_{(1)} = 1$

$l_{(2)} = 2$

$l_{(3)} = 3$

Koordinaten des Lotfußpunktes X :

$x_{(1)} = -0,0327868852$

$x_{(2)} = 0,8196721311$

$x_{(3)} = 3,4426229508$

Lotlänge LX: 1,6296434288

3. Beispiel:

"Lot von Punkt $L(1 \mid 2 \mid 3)$ auf eine durch die Ebene $g: 7x + 8y - 3z = -4$ und Ebene $h: x + y + z = 10$ definierte Gerade im 3-dimensionalen Raum fällen:

Eingabe:

LOT 3||L1|2|3||7|8|-3|-4||1|1|1|10||

Ausgabe:

Koordinaten des Lotpunktes L :

$l_{(1)} = 1$

$l_{(2)} = 2$

$l_{(3)} = 3$

Koordinaten des Lotfußpunktes X :

$x_{(1)} = 0,954955$

$x_{(2)} = 1,495495$

$x_{(3)} = 7,54955$

Lotlänge LX : 4,577658

Bemerkungen:

1.

An Stelle des Symbols "|" kann auch das Symbol ";" verwendet werden.

2.

Die in der Eingabezeile vorhandenen Lücken sollen die Übersicht fördern; sie sind nicht zwingend erforderlich.

3.

Mit **[ENTER]** unmittelbar nach Eingabe von **"LOT n ||L k "** ($n = 1,2,...,9$), ($k = 0, 1,...,9$) also ohne Eingabe der Koeffizienten - generiert das Programm automatisch (als Zufallszahlen) die Koeffizienten des Gleichungssystems, wobei die Anzahl der Nachkommastellen durch Angabe der einstelligen Zahl k ($k = 1,2...9$) festgelegt wird. Die Koordinaten des Startpunktes L werden vorgegeben (**"||L 1 | 2 |.....| n ||"**) und können natürlich nachträglich noch geändert werden.

Beispiel.:

Nach Eingabe von **"LOT 3 ||L1"** ergibt sich mit **[ENTER]**:

"LOT3||L 1 |2 |3 ||2|0,5|-3,5|3,6||0,3|-2,9|1,9|-2,9||.

und mit einem weiteren **[ENTER]**:

Koordinaten des Lotpunktes L :

$l_{(1)} = 1$

$l_{(2)} = 2$

$l_{(3)} = 3$

Koordinaten des Lotfußpunktes X :

$x_{(1)} = 2,615798$

$x_{(2)} = 1,738763$

$x_{(3)} = 0,714565$

Lotlänge LX : 2,811096

Befehlsschaltfläche "**Zwischenablage**" ([ALT] + [Z]):
speichert den Text in die Zwischenablage.

Befehlsschaltfläche "**OK**" ([ALT] + [O] oder [ENTER]):
löscht das Textformular und blendet das Hauptformular "Termevaluator4.3" ein.

Skalares Vielfache eines Vektors Skalar- und Vektorprodukt; Vektorbetrag

Skalares Vielfache s eines Vektors v(a | b | c)

An die Kennung **"SV"** sind der Faktor **s** und die Komponenten **(a | b | c)** anzuschließen:

Eingabe: **"SV s*(a | b | c)"** alternativ: **"SV s(a | b | c)"**.

Nach **[ENTER]** steht das Ergebnis als Vektor im Textfenster "Ausgabe".

Skalar- und Vektorprodukte der Vektoren v(a | b | c) und w(d | e | f):

An die Kennung **"SP"** (für Skalarprodukte) und **"VP"** (für Vektor(Kreuz)produkte) sind die Komponenten **"(a | b | c)"** und **"(d | e | f)"** der Vektoren v und w unmittelbar anzuschließen.

Skalarprodukte: **"SP (a | b | c)(d | e | f)"**

Alternative: **"SP || a | b | c || d | e | f ||"** oder **"SP a | b | c | d | e | f |"**.

Vektorprodukte: **"VP (a | b | c)(d | e | f)"**

Alternative: **"VP || a | b | c || d | e | f ||"** oder **"VP a | b | c | d | e | f |"**.

Nach **[ENTER]** steht das Ergebnis als reelle Zahl (für Skalarprodukte) und als Vektor (für Vektorprodukte) im Textfenster "Ausgabe".

Vektorbetrag des Vektors v(a | b | c):

Auf die Kennung **"VB"** (für Vektorbetrag)) folgen unmittelbar die Komponenten **(a | b | c)** des Vektors v:

"VB (a | b | c)",

Alternative: **"VB || a | b | c ||"** oder **"VB a | b | c |"**.

Nach **[ENTER]** steht das Ergebnis als reelle Zahl im Textfenster "Ausgabe".

An Stelle des Symbols "|" kann auch das Symbol ";" verwendet werden !

Beispiele:

Eingabe: **"SV 3,1*(1|2|3,5)"**

Ausgabe: **"Skalares Vielfache: (3,1 | 6,2 | 10,85)"**

Eingabe: **"VP (1,2|3,4|5,6)(1,1|2,2|3,3)"**

Ausgabe: **"Vektorprodukt: (-1,1 | 2,2 | -1,1)"**

Eingabe: **"SP (1,2|3,4|5,6)(-1,1 | 2,2 | -1,1)"**

Ausgabe: **"Skalarprodukt: 0"**

Eingabe: **"VB (-1,1 | 2,2 | -1,1)"**

Ausgabe: **"Vektorbetrag: 2,6944"**

Linearkombinationen von Vektoren

Das Programm berechnet die Koordinaten des resultierenden Vektors z einer Linearkombination von Vektoren a, b, c, d, e und f.

Die Durchführung wird an einem konkreten Beispiel erläutert:

Vorgegeben sind die Vektoren: $a=(1|2|3)$, $b=(-4,34|1|0)$, $f=(1/3|15|2/9)$ und die Linearkombination $z = 2*a - 3*b + 1/2*f$.

Die Berechnung erfolgt in 2 Schritten:

I.)

Die 3 Vektoren a, b und f mit ihren Koordinaten werden mit vorausgehendem Speicherbefehl „RS“ im Textfenster „Eingabe“ eingetragen:

Eingabe: „RS a=(1|2|3) b=(-4,34|1|0) f=(1/3|15|2/9)“

oder: „RS a(1|2|3) b(-4,34|1|0) f(1/3|15|2/9)“

An Stelle des Trennungszeichens "|" kann auch das (auf der Tastatur leichter erreichbare) Semikolon ";" verwendet werden !

Trennungszeichen z.B. Komma „,“, Semikolon „;“, Strich „|“ oder „-“, dürfen nicht vor den Vektorbezeichnungen a, b, c, d, e, f eingefügt werden.

Mit [ENTER] wird die Eingabezeile gespeichert.

Mit [ALT] + [L] wird dann die Eingabezeile gelöscht.

(Für eine spätere Überprüfung und Korrektur der Vektoreingabe verwendet man den Befehl „RZ“ + [ENTER] (in der Eingabezeile).)

II.)

Der Linearterm: „ $2*a - 3*b + 1/2*f$ “ wird mit vorausgehendem Programmbefehl: im Textfenster „Eingabe“ „LIN“ eingetragen:

„LIN $2*a - 3*b + 1/2*f$ “

Mit [ENTER] wird das Programm dann ausgeführt. Dabei wird der Linearterm „automatisch“ gespeichert.

Der resultierende Vektor erscheint im Textfenster „Ausgabe“:

$z = (15,1867 | 8,5 | 6,1111)$

Für eine spätere Überprüfung und Korrektur des Linearterms verwendet man den Befehl „RCL“ (in der Eingabezeile). mit der Taste [ENTER]

Anmerkungen:

1.

Bei der Eingabe des Linearterms ist zwischen Koeffizient und Vektor immer das Multiplikationssymbol „*“ einzufügen.

Bsp.: Der Linearterm: „ $5a+7b$ “ führt zu einer Fehlanzeige.

Stattdessen trägt man ein: „ $5*a + 7*b$ “.

2.

Anstelle von Zahlen können auch Terme mit festem Wert z.B. „lg(3)“, „exp(2)-1/3“ verwendet werden.

Bsp.: Vektoren: „RS a = (1 | lg(3) | 2 | 3) b = (exp(2) | 2 | 3 | 4)“

Linearterm: "**LIN** (**exp(2)**-1/3)*a + 3*b"

Resultierender Vektor: „z = (29,2229 | 9,3664 | 23,1114 | 33,1672)“

3.

Klammerterme sind bei der Darstellung des Linearterms zulässig.

Bsp.: Vektoren: „**RS** a = (1 | 2) b = (4 | 5)“

Linearterm: "**LIN** 3*(2*a + b) + 1/3*(a – 2*b)"

Resultierender Vektor: „z = (15,6667 | 24,3333)“

4.

Die Dimension n des Vektorraums V_n (n = 2; 3, ... ,9) wird „automatisch“ bei der Eingabe der Vektoren erkannt.

Lineare Geometrie im 3-dimensionalen Raum (Lagebeziehung von Punkten, Geraden, Ebenen, Vektoren zueinander)

Abstand Punkt - Gerade

Mit der Kennung „PUGE“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten des Punktes, des Aufpunktes und des Richtungsvektors. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis in dem Fenster „Ausgabe“

Beispiel:

Eingabe: „PUGE“

[ENTER]

Eingabe: „PUGE Punkt[P](| |) Gerade[g]: Aufpunkt[Q](| |) R-Vektor[V](| |)“

Eingabe: „PUGE PUNKT(10 | 5| 7) AUFPUNKT(-2| 1| 7) R-Vektor(4|1 |-3)“

[ENTER]

Ausgabe: Abstand[P-g]: 7,4833 Lotfußpunkt[R]: (6|3|1)

Abstand Punkt - Ebene

Mit der Kennung „PUEB“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten des Punktes und der Koeffizienten der Koordinatengleichung der Ebene. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis in dem Fenster „Ausgabe“

Beispiel:

Eingabe: „PUEB“

[ENTER]

Eingabe: „PUEB Punkt[P]: (| |) EBENE[E]: A| *x + B| *y + C| *z = D| |“

Eingabe:

„PUEB PUNKT[P]: (1|2|3) EBENE[E]: A|4,5|*x + B|5|*y + C|6|*z = D|-7|“

Ausgabe:

„Abstand[P-E]: 4,3821 Lotfußpunkt[LF]: (-1,1877|-0,4308|0,0831)

Koordinatensprung O und Punkt P liegen zusammen auf einer Seite der Ebene E.“

Abstand Gerade - Gerade

Mit der Kennung „GEGE“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten der Aufpunkte und der Richtungsvektoren der beiden Geraden. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis in dem Fenster „Ausgabe“

Beispiel:

Eingabe: „GEGE“

[ENTER]

Eingabe: „GEGE AUFPU[FP] (| |) R-VEKTOR[FV] (| |)
AUFPU[GP] (| |) R-VEKTOR[GV] (| |)“

Eingabe: „GEGE AUFPU[FP] (-7|2 | -3) R-VEKTOR[FV] (0 | 1|2)
AUFPU[GP] (-3|-3 | 3) R-VEKTOR[GV] (1| 2|1)“

[ENTER]

Ausgabe:

„Die Geraden f und g sind windschief (f und g schneiden sich nicht und verlaufen nicht parallel.).

Der Abstand (Länge der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen f und g) beträgt 7,4833.

Diese Strecke verbindet die Punkte P(-7|5|3) (auf f) und Q(-1|1|5) (auf g).“

Schnittgerade Ebene - Ebene

Mit der Kennung „EBEB“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koeffizienten der Koordinatengleichungen der beiden Ebenen. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis in dem Fenster „Ausgabe“

Beispiel:

Eingabe: „EBEB“

[ENTER]

Eingabe: „EBEB Eb 1: A_1| |*x + B_1| |*y + C_1| |*z = D_1| |
Eb 2: A_2| |*x + B_2| |*y + C_2| |*z = D_2| |“

Eingabe: EBEB Eb 1: A_1| 1|*x + B_1|2|*y + C_1|3|*z = D_1| 4|
Eb 2: A_2|5|*x + B_2| 6|*y + C_2|7|*z = D_2|8|

[ENTER]

Ausgabe:

„Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich unter dem Winkel Alpha =14,4583 DEG.

Die Schnittgerade wird durch die Gleichung (in Parameterform):

$(x|y|z) = (-1|2|0) + r \cdot (-4|8|-4)$
beschrieben.“

Schnittpunkt Gerade - Ebene

Mit der Kennung „GEEB“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten des Aufpunktes, des Richtungsvektors der Geraden und der Koeffizienten der Ebenengleichung. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis im Fenster „Ausgabe“

Beispiel:

Eingabe: „GEEB“

[ENTER]

Eingabe: „GEEB Gerade[g]: Aufpunkt[AP] (| |) R-Vektor[V] (| |)

Ebene[E]: A| *x + B| *y + C| *z = D| |

Eingabe: GEEB Gerade[g]: Aufpunkt[AP] (0| 1| 0) R-Vektor[V] (10|0|-5)

Ebene[E]: A| 1|*x + B| 3|*y + C|-2 |*z =D| 10|

[ENTER]

Ausgabe:

Die Gerade g durchstößt die Ebene E in Z(3,5|1|-1,75) unter dem Winkel 28,5608 DEG.

Von der Parameter- zur Koordinatenform der Ebenengleichung

Mit der Kennung „PARKOO“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten des Aufpunktes und der beiden Spannvektoren v und w der Ebene. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis im Fenster „Ausgabe“.

Beispiel:

Eingabe: „PARKOO“

[ENTER]

Eingabe:

„PARKOO AUFPUNKT[P] (| |) R-VEKTOR[V] (| |) R-Vektor[W] (| |)“

Eingabe: °PARKOO AUFPUNKT[P] (2 | 2 | 1) R-VEKTOR[V] (1 | -2 | 3)

R-Vektor[W] (2 | 5 | 7)“

[ENTER]

Ausgabe:

Ausgabe: (29)*x + (1)*y + (-9)*z = 51

Betrag Vektor

Mit der Kennung „VEK“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten des Vektors v. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis im Fenster „Ausgabe“.

Beispiel:

Eingabe: „VEK“

[ENTER]

Eingabe: „VEK Vektor[v]: (| |)“

Eingabe: °VEK Vektor[v]: (1|-2|-3,5)“

[ENTER]

Ausgabe: „Betrag des Vektors v [ABS(v)] = 4,1533“

Vektor – Vektor (Skalar-, Vektorprodukt, Winkel, Vektordifferenz)

Mit der Kennung „VEKVEK“ (Fenster „Eingabe“) und [ENTER] erhält man eine Schablone für die Eingabe der Koordinaten der Vektoren v und w. (Die Darstellung im Fenster „Ausgabe“ ist als Beispiel anzusehen und hat für die weitere Rechnung keine Bedeutung!)

Nach Eingabe der Zahlenwerte und [ENTER] erhält man das Ergebnis im Fenster „Ausgabe“.

Beispiel:

Eingabe: „VEKVEK“

[ENTER]

Eingabe:

VEKVEK Vektor[v]: (| |) Vektor[w]: (| |)

Eingabe:

„VEKVEK Vektor[v]:(1|-3.5|1) Vektor[w]:(3|4|-1)“

Ausgabe:

Skalarprodukt $v \cdot w = -12$

Vektorprodukt $[v, w] = (-0,5 \mid 4 \mid 14,5)$

Betrag des Vektorproduktes $[v, w] = 15,0499$

Von den Vektoren v und w eingeschlossener Winkel Alpha = 128,567 DEG

Flächeninhalt des von den Vektoren v und w aufgespannten Dreiecks:

A = 7,525 FE

Vektor $(w - v) = (2 \mid 7,5 \mid -2)$

Betrag des Vektors $(w - v) = 8,0156$

Summe ($f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b)$)

Das Programm ermöglicht die Addition von Werten einer Funktion $f(x)$: $f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b)$. Das Argument x nimmt zuerst den Wert a an und wächst dann gleichmäßig an, bis es den Wert b überschreitet. Nach der Kennung **"SUM"** sind die drei Parameter Anfangswert a , Endwert b und Zuwachs h einzutragen; es folgt der Funktionsterm $f(x)$ (**"SUM a| b| h| f(x)"**). (Anstelle des Trennungszeichens "|" kann ein Semikolon ";" geschrieben werden.)

Beispiele

1.

$$f(x) = x^2$$

$$\text{SUM } 1| 3| 0,5| x^2 = 1^2 + 1,5^2 + 2^2 + 2,5^2 + 3^2 = 22,5$$

2.

Partialsumme $S_{-}(10)$ einer geometrischen Reihe:

$$f(x) = 0,5^x$$

$$\text{SUM } 0| 10| 1| 0,5^x = 0,5^0 + 0,5^1 + 0,5^2 + \dots + 0,5^{10} = 1,9990234375$$

3.

Untersumme $U_{-}(1000)$ zum Integral über x^3 in den Grenzen von 0 bis 10

$$f(x) = x^3 \cdot 0.01$$

$$\text{SUM } 0| 9.99| 0.01| x^3 \cdot 0.01 = 2495,0025$$

4.

Zwischensumme $Z_{-}(1000)$ zum Integral über x^3 in den Grenzen von 0 bis 10:

$$f(x) = (0,005+x)^3 \cdot 0.01$$

$$\text{SUM } 0| 9.99| 0.01| (0,005+x)^3 \cdot 0.01 = 2499,99875$$

Für den Fall, dass für den Zuwachs h gilt: $h = 1$, ist der Eintrag h nicht erforderlich.

Es gilt also: SUM a| b| 1| f(x) = SUM a| b| f(x).

5. Partialsumme $S_{-}(1000)$ der harmonischen Reihe:

$$f(x) = 1/x$$

$$\text{SUM } 1| 1000| 1/x = 1/1 + 1/2 + \dots + 1/1000 = 7,4854708606$$

Ein weiteres Beispiel findet man unter Bild 24 !

Unendliche Reihen

Die Routine „Unendliche Reihen“ berechnet - **im Fall der Konvergenz der Reihe** - den Reihenwert s , sofern die Reihe einem der folgenden Reihentypen zugeordnet werden kann:

- A) **Geometrische Reihe**
- B) **Harmonische Reihe**
- C) **Reihe mit einem rationalen Term**
- D) **Alternierende Reihe**

Bezeichnungen:

„ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ “	Unendliche Reihe
$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$	Reihenglieder
„ $a_1 - a_2 + \dots + a_n + \dots$ “	Alternierende Reihe
„ n “	Laufindex
„ s “	Reihen(Grenz)wert
„ $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ “	Partial(Teil)summe aus n Reihengliedern
„ C “, „ D “	Konstanten
„ $ZÄ$ “	Zähler eines Bruchterms
„ NE “	Nenner eines Bruchterms

A) Geometrische Reihe

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

mit dem Reihenglied:

$$a_n = (C) \cdot (D)^n; \quad (C \text{ beliebiger Wert und } \text{abs}(D) < 1)$$

Mit der Kennung „**GEOREI**“ wird das Raster

„**GEOREI** | $n = 1$ | $(C) \cdot (D)^n$ “ erstellt.

Man gibt für „**C**“ (Vorfaktor) und für „**D**“ (Potenzbasis) Werte ein.

Für den Betrag von D muss gelten: $\text{abs}(D) < 1$! (Andernfalls ist die Reihe divergent!)

D kann auch ein numerischer Term sein (z.B. „ $1/\text{sqr}(2)$ “).

Wenn der Laufindex n mit einem (ganzzahligen) Wert $\neq 1$ beginnen soll, ersetzt man den vorgegebenen Wert („1“) entsprechend.

Mit **[ENTER]** wird der Reihenwert berechnet.

Beispiele:

1.

Eingabe: „**GEOREI**| $n=1$ |(C 1)*(D 0.7)^ n “

Ausgabe: „2,333333333“

2.

Eingabe: „**GEOREI**| $n=3$ |(C 5)*(D -0.7)^ n “

Ausgabe: „-1,0088235294“

3.

Eingabe: „**GEOREI**|n=1|(C 5)*(D 1/sqr(2))^n“

Ausgabe: „12,0710678119“

4.

Eingabe: „**GEOREI**|n=1|(C 5)*(D sqr(2))^n“

Ausgabe: „Reihe divergent! (B >1)“

Anstelle einer Konstanten kann für den Vorfaktor C auch ein Polynom (in „n“) eingesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern.

5.

Eingabe: „**GEOREI**|n=1|(C n^2+2*n)*(D 0.7)^n“

Ausgabe: „59,6296296296“

B) Harmonische Reihe

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

mit dem Reihenglied:

$$a_n = 1/n^C \quad ; \quad (C > 1)$$
Mit der Kennung „**HARMREI**“ wird das Raster„**HARMREI** | n = 1 | 1/n^C “ erstellt.**Für C (Exponent) muss gelten: C > 1 !** (Andernfalls ist die Reihe divergent!)

Wenn der Laufindex n mit einem (ganzzahligen) Wert > 1 beginnen soll,

ersetzt man den vorgegebenen Wert („1“) entsprechend.

Mit **[ENTER]** wird der Reihenwert berechnet.

Beispiele:

1.

Eingabe: „**HARMREI**|n=1|1/n^(C2)“

Ausgabe: „1,6449340668“

2.

Eingabe: „**HARMREI**|n=5|1/n^(C1,65)“

Ausgabe: „0,5775000205“

C) Reihe mit einem rationalen Term

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

mit dem Reihenglied:

$$a_n = \text{ZÄ}(\text{Polynom } P(n)) / \text{NE}(\text{Polynom } Q(n))$$
Mit der Kennung **RATREI**“ wird das Raster„**RATREI** | n = 1 | ZÄ()/NE()“ erstellt.**In den Zähler bzw. Nenner des Bruchterms „ZÄ()/NE()“ sind Polynome**

$P(n)$ bzw. $Q(n)$ einzusetzen. Hierbei **muss der Grad des Nennerpolynoms den Grad des Zählerpolynoms um mindestens 2 übersteigen:**

$\text{grad}(\text{NE}(\dots)) \geq \text{grad}(\text{ZÄ}(\dots)) + 2$. (Andernfalls ist die Reihe divergent!)

Wenn der Laufindex n mit einem (ganzzahligen) Wert > 1 beginnen soll, ersetzt man den vorgegebenen Wert („1“) entsprechend.

Mit [ENTER] wird der Reihenwert berechnet.

Beispiele:

1.

Eingabe: „**RATREI|n=1|ZÄ(n+1)/NE(n^3-n+1)**“

Ausgabe: „**2,919809**“

2.

Eingabe: „**RATREI|n=1|ZÄ(n+1)/NE(n^2-n+1)**“

Ausgabe: „**Reihe divergiert gegen unendlich!**“

Auch Potenzaggregate mit nicht-ganzzahligen Exponenten sind zulässig!

Wenn wir die größten im Zähler bzw. Nenner auftretenden Exponenten wieder mit $\text{grad}(\text{ZÄ}(\dots))$ bzw. $\text{grad}(\text{NE}(\dots))$ bezeichnen, so lautet die Konvergenzbedingung: $\text{grad}(\text{NE}(\dots)) > \text{grad}(\text{ZÄ}(\dots)) + 1$.

3.

Eingabe: „**RATREI|n=1|ZÄ(n^1,5+1)/NE(n^2,9+1)**“

Ausgabe: „**3,25288**“

D) Alternierende Reihe

$s = „a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots“$

mit dem Reihenglied: $(-1)^{n+1} a_n$.

Mit der Kennung „**ALTREI**“ wird das Raster

„**ALTREI | n = 1|(-1)^{n+1}*(C)**“ erstellt.

Für C ist der Term für eine monoton fallende positive Nullfolge einzutragen (z.B. „ $1/n$ “) ! Eine derartige Reihe ist konvergent (Leibnizsche Regel).

Wenn der Laufindex n mit einem (ganzzahligen) Wert > 1 beginnen soll, ersetzt man den vorgegebenen Wert („1“) entsprechend.

Mit [ENTER] wird der Reihenwert s berechnet.

Beispiele:

1.

$a_n = 1/n$

$s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$

Eingabe: „**ALTREI|n=1|(-1)^{n+1}*(C1/n)**“

Ausgabe: „**0,6931471806**“

2.

$$a_n = 1/((\log(n)+n))$$

$$s = 1 - 1/(\log(2)+2) + 1/(\log(3)+3) - 1/(\log(4)+4) + \dots$$

Eingabe: „**ALTREI|n=1|(-1)^(n+1)*(C1/(log(n)+n))**“Ausgabe: „**0,7694021503**“Anmerkung:

Um eine Vorstellung von der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Berechnung des Reihenwertes zu erhalten, kann man zusätzlich Partialsummen mit dem Zusatz: „...**P_nn**“ bestimmen.

Beispiele:

1.

Eingabe: „**GEOREI|n=1|(C 1)*(D 0.7)^n P50**“Ausgabe: „**s=2,33333333 | s_50=2,33333329**“

Interpretation: Die Partialsumme s_{50} (Partialsumme aus 50 Summanden) nähert bereits gut den Reihenwert an: $s - s_{50} = 0,00000004$. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist hoch.

2.

Eingabe: „**HARMREI|n=1|1/n^(C2) P50**“Ausgabe: „**s=1,64493407 | s_50=1,62513273**“

Interpretation: Die Partialsumme s_{50} (Partialsumme aus 50 Summanden) weicht erheblich vom Reihenwert s ab: $s - s_{50} = 0,01980134$. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist gering.

Iterationen

Viele numerische Verfahren bestehen aus der wiederholten Anwendung einer Funktionsvorschrift f ; dabei wird der nach k Stufen berechnete Wert $x_{(k)}$ für die Berechnung des nächsten Wertes $x_{(k+1)} = f(x_{(k)})$ verwendet.

Für eine konkrete Durchführung ist die Angabe eines Startwertes a , der Anzahl der Iterationen n und der Funktionsvorschrift f erforderlich.

Schreibweise: "IT a | n | f" (Tastencode: **[STRG] + [T]**). Die Werte $x_{(n-1)}$ und $x_{(n)}$ werden ausgegeben.

Anstelle des Trennungszeichen " | " kann das Semikolon " ; " verwendet werden.

Die Kennung "IT" ist immer voranzustellen.

Wenn das Programm während der Bearbeitung feststellt, dass die Werte $x_{(k)}$ sehr groß ($> 10^{25}$) werden oder aufeinanderfolgende Werte $x_{(k)}$, $x_{(k+1)}$,..... sich nur noch geringfügig und damit nicht mehr sichtbar ändern, wird die Bearbeitung abgebrochen. Die aktuellen Werte $x_{(k)}$, $x_{(k+1)}$ werden ausgegeben.

Beispiele:

1.

"Heron-Verfahren" (zur Berechnung der Quadratwurzel aus 3)

Startwert: 1; Anzahl der Iterationen: 4; Stellenzahl: 14

Eingabe: "IT 1| 4| (x+3/x)/2"

Ausgabe: $x(3)=1,73214285714286$ $x(4)=1,732050810014731$.

2.

"Heron-Verfahren" (zur Berechnung der Quadratwurzel aus 10)

Startwert: 1; Anzahl der Iterationen: 23; Stellenzahl: 14

Eingabe: "IT 1| 23| (x+10/x)/2"

Ausgabe: "Abbruch ! $x(6)=3,16227766016838$ $x(7)=3,16227766016838$ "

3.

"Newton-Verfahren"

(zur Berechnung der Nullstellen von $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 1$)

Startwert: 10; Anzahl der Iterationen: 5; Stellenzahl: 14

Eingabe: "IT 10| 5| $x-(x^3-x^2-6x+1)/(3x^2-2x-6)$ "

Ausgabe: " $x(4)=3,16274973657577$ $x(5)=2,95592047003878$ "

4.

"Newton-Verfahren"

(zur Berechnung der Nullstellen von $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 1$)

Startwert: 10; Anzahl der Iterationen: 15; Stellenzahl: 14

Eingabe: "IT 10| 15| $x-(x^3-x^2-6x+1)/(3x^2-2x-6)$ "

Ausgabe: "Abbruch ! $x(8)=2,93080160017276$ $x(9)=2,93080160017276$ "

Ein weiteres Beispiel findet man unter Bild 23

Differenzialgleichungen (1. Ordnung)

Eine Differenzialgleichung - mit **DGL** abgekürzt - ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion "**y(t)**" (kurz: "**y**"), in der zusätzlich Ableitungen der Funktion y(t) und die Variable "t" auftreten. **Eine Differenzialgleichung drückt also eine Abhängigkeit zwischen der Variablen t, der Funktion y(t) und den Ableitungen der Funktion y(t) aus.** Viele Naturgesetze können mittels DGLen formuliert werden. DGLen sind daher ein wichtiges Hilfsmittel für die Beschreibung von physikalischen, chemischen und biologischen Abläufen.

Die 1. Ableitung von y(t) "y Strich" bezeichnen wir künftig mit "ys(t)" (kurz "ys").

Im Folgenden werden nur solche DGLen behandelt, in denen die 1. Ableitung von y(t) für sich auf der einen Seite, die Variablen t und y in einem Term g(t, y) auf der anderen Seite der DGL auftreten:

$$ys = g(t, y)$$

Eine derartige DGL heißt "explizite DGL 1. Ordnung".

Beispiel 1: **ys = t / y**

Beispiel 2: **ys = t + y^2**

Es ist auch zulässig, dass nur eine der Variablen t oder y auf der rechten Seite der DGL auftritt.

Beispiel 3: **ys = sin(t)**

Beispiel 4: **ys = 2*y**

Lösungen zu Beispiel 1: $y(t) = \sqrt{t^2 + r}$ und $y(t) = -\sqrt{t^2 + r}$,
wobei r eine reelle Zahl ist.

Lösungen zu Beispiel 2: Diese DGL besitzt unendlich viele Lösungen; jedoch sind diese nicht in geschlossener Form darstellbar,

Lösungen zu Beispiel 3: $y(t) = -\cos(t) + r$,
wobei r eine reelle Zahl ist.

Lösungen zu Beispiel 4: $y(t) = r \cdot \exp(2t)$,
wobei r eine reelle Zahl ist.

Aus den oben genannten Beispielen geht hervor, dass die Lösung durch die DGL allein nicht eindeutig festgelegt ist; man benötigt zusätzlich zu einem vorgegebenen "Anfangswert" von t (Bezeichnung: **ta**) den zugehörigen Funktionswert y(ta) der Lösungsfunktion (Bezeichnung: **ya**).

Die Suche nach einer solchen Lösung bezeichnet man als Anfangswertproblem (AWP).

In den oben beschriebenen Beispielen (ausgenommen Beispiel 2) konnten die Lösungen in überschaubarer und geschlossener Form angegeben werden. Für praxisnahe Probleme, die durch gewöhnliche Differenzialgleichungen beschrieben werden, ist jedoch im Regelfall eine Lösung in dieser Form

entweder gar nicht möglich oder aber mit sehr hohem Aufwand verbunden. Hier ist man auf ein Näherungsverfahren angewiesen, mit dessen Hilfe der Funktionswert **ye** der Lösungsfunktion zu einem vorgegebenen Wert von **te** näherungsweise berechnet werden kann (**ye = y(te)**). Wir verwenden zur Berechnung des Funktionswertes ye das klassische Runge-Kutta-Verfahren (Wikipedia:: "Klassisches Runge-Kutta-Verfahren"), auf dessen mathematischen Hintergrund im Einzelnen nicht eingegangen werden kann..

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP):

ys = g(t, y) mit ya = y(ta).

Zu berechnen ist der Funktionswert ye = y(te) !

In das Fenster "Eingabe" ist einzutragen:

"DGL ta | ya | te | g(t, y)".

Die Bearbeitung erfolgt mit **[ENTER]**.

Die Bearbeitungsdauer hängt von der Länge des Intervalls **[ta...te]** ab.

Nach der Bearbeitung erscheint im Fenster "Ausgabe" außer dem vorgegebenen Wert **te** der gesuchte Funktionswert **ye = y(te)**.

Zur Berechnung von **ye** wird im Intervall **[ta...te]** eine große Zahl von weiteren Funktionswerten ermittelt.

Aufgerufen wird das Graphikfenster durch Anklicken der Befehlsschaltfläche **"Funktionsgraph"** oder mit Taste **[F2]**.

Mit Hilfe dieser Werte zeichnet das Programm (nach **[ENTER]** oder nach Anklicken der Befehlsschaltfläche **"Plot"**) den Graphen der Lösungsfunktion punktweise und verbindet diese Punkte.

Zu Beispiel 1: **ys = t / y(t); ta = -5; ya = 5,1; te = 4**

Eingabefenster: **"DGL-5|5,1|4|t/y"**

Ausgabefenster: **"t=4 y=4,1243181255"**

Lösungsfunktion: **y(t) = sqrt(t^2 + 1,01)**

ye = y(4): **sqrt(17,01) = 4,124318125**

Den Graphen der Lösungsfunktion und die Asymptoten $y = t$ und $y = -t$ (rot gezeichnet) findet man unter Bild 27 !

Zu Beispiel 2: **ys = t + y^2 ta = -2; ya = -3; te = 2**

Eingabefenster: **"DGL -2 | -3 | 4 | t+y^2"**

Ausgabefenster: **"te=2 ye=2,6961490573"**

Zu Beispiel 3: **ys = sin(t); ta = 0; ya = 0; te = 10**

Eingabefenster: **"DGL 0 | 0 | 10 | sin(t)"**

Ausgabefenster: **"te=10 ye=1,8390715291"**

Lösungsfunktion: **y(t) = -cos(t) + 1**

ye = y(10): **1 - cos(10) = 1,839071529**

Zu Beispiel 4: **ys = 2*y; ta = -0,5; ya = 1; te = 5**

Eingabefenster: **"DGL -0.5 | 1 | 3 | 2*y"**

Ausgabefenster: **"te=3 ye=1096,6331584274"**

Lösungsfunktion: **y(t) = exp(2t + 1)**

ye = y(3): exp(7) = 1096,6331584285

Als Variante zu dem Eintrag "**DGL ta | ya | te | f(t, y)**" steht "**DG n | ta | ya | te | f(t, y)**" zur Verfügung, wobei für den Platzhalter **n** eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 einzutragen ist.
Hiermit wird das Programm angewiesen, zusätzlich **n** Lösungskurven oberhalb und unterhalb der durch die Anfangsbedingung festgelegten Lösungskurve zu zeichnen. !

Beispiel 5: **ys = cos(t^2); ta = 0; ya = 0; ye = 5**
Eingabefenster: **"DG 1 | 0 | 0 | 5 | 10*cos(t^2)"**
Ausgabefenster: **"te=5 ye=6,114667664"**
Zur graphischen Darstellung siehe Bild 28

Beim Aufruf des Moduls "Differenzialgleichungen (1. Ordnung)" über die Menüleiste oder das Schlagwortverzeichnis "Index" wird der bisher im Eingabefenster stehende Text in die Zwischenablage verschoben. Er steht weiterhin mit [STRG] + [V] zur Verfügung.

Differenzialgleichungen (2. Ordnung)

Die 1. Ableitung "y-Strich" einer Funktion $y(t)$ bezeichnen wir mit " $y_s(t)$ " (kurz " y_s ").

Die 2. Ableitung "y-Zwei-Strich" einer Funktion $y(t)$ bezeichnen wir mit " $y_{ss}(t)$ " (kurz " y_{ss} ").

Eine Gleichung, in der die 2. Ableitung $y_{ss}(t)$ auf der einen Seite, die Variablen t , y und y_s in einem Term $g(t, y, y_s)$ auf der anderen Seite der Gleichung auftreten, heißt "explizite DGL 2. Ordnung":

$$y_{ss} = g(t, y, y_s)$$

Für die eindeutige Festlegung einer Lösung benötigt man zu einem vorgegebenen Anfangswert t_a sowohl den Funktionswert der Lösung $y_a = y(t_a)$ als auch den Funktionswert der Ableitung $y_{sa} = y_s(t_a)$.

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP):

$y_{ss} = g(t, y)$ mit $y_a = y(t_a)$ und $y_{sa} = y_s(t_a)$.

Zu berechnen ist der Funktionswert $y(t_e)$ und der Funktionswert der 1. Ableitung $y_s(t_e)$!

Für eine DGL 2. Ordnung ist die Kennung "**DGG**" zu verwenden.

In das Fenster "Eingabe" ist einzutragen:

"DGG t_a | y_a | y_{sa} | t_e | $g(t, y, y_s)$ ".

Die Bearbeitung erfolgt mit **[ENTER]**.

Die Bearbeitungsdauer hängt von der Länge des Intervalls **$[t_a...t_e]$** ab.

Nach der Bearbeitung erscheint im Fenster "Ausgabe" außer dem vorgegebenen Wert t_e der gesuchte Funktionswert **$y_e = y(t_e)$** .

Zur Berechnung von **$y(t_e)$ und $y_s(t_e)$** wird im Intervall **$[t_a...t_e]$** eine große Zahl von weiteren Funktionswerten ermittelt.

Aufgerufen wird das Graphikfenster durch Anklicken der Befehlsschaltfläche "**Funktionsgraph**" oder mit Taste **[F2]**. .

Mit Hilfe dieser Werte zeichnet das Programm (nach **[ENTER]** oder Anklicken der Befehlsschaltfläche "**Plot**") den Graphen der Lösungsfunktion $y(t)$ und ihrer Ableitung $y_s(t)$ "punktweise" und verbindet diese Punkte.

Die graphische Darstellung der Lösungsfunktion $y(t)$ (und ihrer Ableitung $y_s(t)$) kann auf verschiedene Weise erfolgen

1.

Eingabe: **"DGG t_a | y_a | y_{sa} | t_e | $g(t, y, y_s)$ ".**

oder

"DGGY t_a | y_a | y_{sa} | t_e | $g(t, y, y_s)$ ".

Der Graph von $y(t)$ wird dargestellt.

2.

Eingabe: **"DGGYS t_a | y_a | y_{sa} | t_e | $g(t, y, y_s)$ ".**

Der Graph von $y_s(t)$ wird dargestellt.

3.

Eingabe: "DGGYYS ta | ya | ysa | te | g(t, y, ys)".

Die Graphen von $y(t)$ und $ys(t)$ werden gemeinsam ($ys(t)$ punktiert) dargestellt.

4.

Eingabe: "DGGY-YS ta | ya | ysa | te | g(t, y, ys)".

Die (Phasen)Kurve ($y(t) | ys(t)$) wird für die Parameterwerte t des Intervalls $[ta...te]$ dargestellt.

5.

Eingabe: "DGGYS-Y ta | ya | ysa | te | g(t, y, ys)".

Die (Phasen)Kurve ($ys(t) | y(t)$) wird für die Parameterwerte t des Intervalls $[ta...te]$ dargestellt.

Für jede der 3 Varianten gilt:

Ausgabe (im Hauptfenster): "te $y(te)$ $ys(te)$ "

Beim Aufruf des Moduls "Differenzialgleichungen (2. Ordnung)" über die Menüleiste oder das Schlagwortverzeichnis "Index" wird der bisher im Eingabefenster stehende Text in die Zwischenablage verschoben. Er steht weiterhin mit [STRG] + [V] zur Verfügung.

Beispiel 1: $yss = ys - y - \cos(t) + \sin(t) + 2t - 1$ mit
 $ta=0$; $ya=0$; $ysa=3$; $te=7$. (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: "DGG 0 | 0 | 3 | 7 | $ys-y-\cos(t)+\sin(t)+2*t-3$ "

Ausgabefenster: "te=7 $y(te)=14,410889$ $ys(te)=2,096916$ "

Lösungsfunktion: $y(t) = \sin(t) + \cos(t) + 2t - 1$

$ys(t) = \cos(t) - \sin(t) + 2$

$y(te) = y(7) = \sin(7)+\cos(7)+13 = 14,4109$

$ys(te) = ys(7) = \cos(7)-\sin(7)+2 = 2,09692$

Beispiel 2: **Mathematisches Pendel "kleiner Ausschlag"**

Die Bewegung eines "mathematischen Pendels" wird durch die DGL 2.Ordnung: $yss = -k*\sin(y)$ beschrieben.

y ist der Winkel (im Bogenmaß RAD) zwischen der momentanen Position und der Ruheposition des Pendels. Die Konstante k ist der Quotient aus der Fallbeschleunigung g und der Pendellänge l . Wir wählen im folgenden Beispiel: $k=12$!).

Der Pendelkörper wird aus der Ruhelage mit der Winkelgeschwindigkeit $ys(0) = 3$ rad/s ausgelenkt. An welcher Stelle ($y(te)$) befindet er sich nach $te = 10$ s ? Welche Winkelgeschwindigkeit ($ys(te)$) hat er zu diesem Zeitpunkt ?

$yss = -12*\sin(y)$

ta=0; ya=0; ys=3; te=10 (Winkeleinheit: "RAD" !)
 Eingabefenster: **"DGGYYS 0 | 0 | 3 | 10 | - 12*sin(y)"**
 Ausgabefenster: **"te=10 y(te)=-1,216587 ys(te)=5,675453"**
 Lösungsfunktion (genähert): **yn(t) = 3/sqrt(12) * sin(sqrt(12)*x)**
 Zur graphischen Darstellung siehe Bild 33

Beispiel 3: Mathematisches Pendel "großer Ausschlag"

siehe Beispiel 6

Der Pendelkörper wird aus der Ruhelage mit der Geschwindigkeit $ys(0) = 6,92 \text{ rad/s}$ ausgelenkt. An welcher Stelle ($y(te)$) befindet er sich nach $te = 10 \text{ s}$? Welche Winkelgeschwindigkeit ($ys(te)$) hat er zu diesem Zeitpunkt ?

yss = -12*sin(y)

ta=0; ya=0; ys=6,92; te=10 (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: **"DGGYYS 0 | 0 | 6,92 | 10 | - 12*sin(y)"**

Ausgabefenster: **"te=10 y(te)=-1,216587 ys(te)=5,675453"**

Die Lösung lässt sich in geschlossener Form nicht darstellen.

Zur graphischen Darstellung siehe Bild 34

Beispiel 4: Mathematisches Pendel mit "Überschlag"

siehe Beispiel 7

Der Pendelkörper wird aus der Ruhelage mit der Winkelgeschwindigkeit $ys(0) = 6,95 \text{ rad/s}$ ausgelenkt. An welcher Stelle ($y(te)$) befindet er sich nach $te = 10 \text{ s}$? Welche Winkelgeschwindigkeit ($ys(te)$) hat er zu diesem Zeitpunkt ?

yss = -12*sin(y)

ta=0; ya=0; ys=6,95; te=10 (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: **"DGGYYS 0 | 0 | 6,95 | 10 | - 12*sin(y)"**

Ausgabefenster: **"te=10 y(te)=-1,216587 ys(te)=5,675453"**

Die Lösung lässt sich nicht in geschlossener Form darstellen.

Zur graphischen Darstellung siehe Bild 35

**Beispiel 5: Mathematisches Pendel mit "Dämpfung";
Darstellung im Phasendiagramm ($y(t)$ / $ys(t)$)**

siehe Beispiel 7

Der Pendelkörper wird aus der Ruhelage mit der Winkelgeschwindigkeit $ys(0) = 6,95 \text{ rad/s}$ ausgelenkt. Für die Dämpfung des Pendels ergänzt man die DGL um einen zu ys proportionalen Term, in unserem Beispiel: $-0.1*ys$.

An welcher Stelle ($y(te)$) befindet sich das Pendel nach $te=30 \text{ s}$? Welche Winkelgeschwindigkeit ($ys(te)$) hat er zu diesem Zeitpunkt ?

yss = -12*sin(y) - 0,1*ys

ta=0; ya=0; ys=6,95; te=30 (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster:

"DGGY-YS 0 | 0 | 6,95 | 50 | - 12*sin(y) - 0,1*ys"

Ausgabefenster: **"te=50 y(te)=0,087828 ys(te)=-0,570158"**

Die Lösung lässt sich nicht in geschlossener Form darstellen.

Zur graphischen Darstellung siehe Bild 36

Differenzialgleichungssysteme

Vorgänge in der Natur oder der Technik werden oft durch ein sogenanntes System von Differenzialgleichungen (kurz: **DGS**), beschrieben. Die Lösung eines solchen Systems besteht aus mehreren Funktionen.

Wir beschränken uns auf Systeme, die aus 2 Gleichungen mit den Lösungen **x(t)** und **y(t)** (kurz: **x** und **y**) bestehen.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}_x(t, x, y)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}_y(t, x, y)$$

g_x(t, x, y) und **g_y(t, x, y)** sind Terme, in denen die Variablen **t**, **x** und **y** auftreten.

Zur Berechnung der Funktionswerte **x(te)** und **y(te)** ermittelt das Programm im Intervall **[ta...te]** eine große Zahl von weiteren Werten.

Die Bearbeitungsdauer hängt von der Länge des Intervalls **[ta...te]** ab.

Nach der Bearbeitung erscheinen im Fenster "Ausgabe" neben dem vorgegebenen Wert te die gesuchten Funktionswerte x(te) und y(te).

Aufgerufen wird das Graphikfenster durch Anklicken der Befehlsschaltfläche "Funktionsgraph" oder mit Taste [F2].

Das Programm zeichnet dann nach [ENTER] oder Anklicken der Befehlsschaltfläche "Plot" die Graphen der Lösungskomponenten x(t) und y(t) "punktweise" und verbindet diese Punkte.

Die graphische Darstellung kann auf verschiedene Weise erfolgen

1.

Eingabe: "DGS ta | xa | ya | ye | g_x(t, x, y) | g_y(t, x, y)"

oder

Eingabe: "DGSXYT ta | xa | ya | ye | g_x(t, x, y) | g_y(t, x, y)"

Die Graphen der Lösungskomponenten x(t) und y(t) werden **gemeinsam** (x(t) punktiert) dargestellt.

2.

Eingabe: "DGSXT ta | xa | ya | ye | g_x(t, x, y) | g_y(t, x, y)"

Die Lösungskomponente x(t) wird dargestellt.

3.

Eingabe: "DGSYT ta | xa | ya | ye | g_x(t, x, y) | g_y(t, x, y)"

Die Lösungskomponente y(t) wird dargestellt.

4.

Eingabe: "DGSX-Y ta | xa | ya | ye | g_x(t, x, y) | g_y(t, x, y)"

Die graphische Darstellung erfolgt in einem **x-y-Diagramm (Phasenkurve)!**

Beim Aufruf des Moduls "Differenzialgleichungssystem" über die Menüleiste oder das Schlagwortverzeichnis "Index" wird der bisher im Eingabefenster stehende Text in die Zwischenablage verschoben. Er steht weiterhin mit [STRG] + [V] zur Verfügung.

Beispiel 1: $xs = x + y$
 $ys = 4*x - 2*y$
 $ta = 0; \quad xa = 0; \quad ya = 5$
 Eingabe: "DGSXYT 0 | 0 | 5 | 1 | x + y | 4*x - 2*y"
 Ausgabe: "t=1 x=7,339269 y=7,588204"
 Theoretische Lösung: $x(t) = -\exp(-3t) + \exp(2t)$
 $y(t) = 4*\exp(-3t) + \exp(2t)$
 $x(1) = 7,33927; \quad y(1) = 7,5882$
 Zur graphischen Darstellung siehe Bild 29

Beispiel 2: "Schräger Wurf"
 Ein Projektil startet mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s unter einem Steigungswinkel von 45°. (Startposition: (0 | 0))
 Wo befindet sich das Projektil zum Zeitpunkt $t_e = 4$ s ?
 Zusätzlich zur Flugbahn soll die Flugrichtung zum Zeitpunkt $t = 0$ s eingezeichnet werden. Hierzu ist in das Feld "f(x)" (Graphikfenster) der Term "x" einzutragen und das Befehlsfeld "1 : 1"
 ([ALT] + [:]) anzuklicken !

$xs = \cos(45)*40$
 $ys = \sin(45)*40 - 9,81*t$
 $ta = 0; xa = 0; ya = 0; te = 4$
 Winkeleinheit: "DEG"

Eingabe: "DGSX-Y 0|0|0|5|cos(45)*40|sin(45)*40-9,81*t"
 Ausgabe: "te=5 x(te)=141,421356 y(te)=18,796356"
 Zur graphischen Darstellung siehe Bild 30

Beispiel 3: "Lotka-Volterra-Modell"

$xs = 3.8*x - 0.3*x*y$
 $ys = 3.4*x*y - 4*y$
 $ta = 0; xa = 2; ya = 1; te = 12$

Derartige DGSe beschreiben periodische Erscheinungen, die in vielfältiger Weise in der belebten Natur auftreten.

Eingabe: "DGSX-Y 0|2|1|12|3.8*x - 0.3*x*y|3.4*x*y - 4*y"
 Ausgabe: "t=12 x=0,210477 y=2,411683"
 Zur graphischen Darstellung siehe Bild 31 und Bild 32

Tab. 2: Beschreibung der Befehlsschaltflächen

<u>Bezeichnung</u>	<u>Tasten-</u> <u>kombination</u>	<u>Funktion</u>
Ausgabe in <u>Z</u> wischenablage	[ALT] + [Z]	kopiert den Inhalt von "Ausgabe" in die Zwischenablage.
Berechnung	[ENTER]	wertet den Inhalt von "Eingabe" aus.
<u>E</u> ingabe	[ALT] + [E]	setzt den Cursor in das Feld "Eingabe".
<u>E</u> ingabe	[ALT] + [A]	setzt den Cursor in das Feld "Ausgabe".
<u>E</u> ingabe	[ALT] + [L]	löscht den Inhalt des Feldes "Eingabe".
Ei <u>n</u> stellung	[ALT] + [N]	öffnet eine Übersicht über die aktuellen Einstellungsdaten
ENDE	[F4] [ALT] + [F4]	beendet das Programm. Alle Einstellungsdaten werden gesichert.
Fenster VERKLEINERN / VERGRÖßERN	[F3]	verkleinert / vergrößert die Bedienungsoberfläche
(1) Funktions- auswertung	[F1]	öffnet das Formular "Funktionsauswertung".
(2) Funktionsgraph	[F2]	öffnet das Formular "Funktionsgraph".
<u>H</u> ilfe	[ALT] + [H]	lädt die Datei "Bedienungstermevaluator.doc".
Hintergr <u>u</u> ndfarbe	[ALT] + [U]	variiert die Farbe der Arbeitsfläche.
Index <u>u</u>	[ALT] + [X]	Schlagwortliste
<u>I</u> nf <u>o</u>	[ALT] + [I]	Angaben zum Programm
<u>L</u> öschen (Eingabe)	[ALT] + [L]	löscht den Inhalt von "Eingabe".
Laden in Eingabe	„RR“ [ENTER]	lädt den im temporären Speicher befindlichen Inhalt in das Eingabefeld
Speichern in Dauerspeicher	„RS“ [ENTER]	speichert den im Eingabefeld befindlichen Inhalt in das Dauerspeicher
Laden in Eingabe	„RZ“ [ENTER]	lädt den im Dauerspeicher befindlichen Inhalt in das Eingabefeld
<u>P</u> rotokolleintrag	[ALT] + [P]	Die Inhalte von "Eingabe" <u>und</u>

(Ein- und Ausgabe)		"Ausgabe" werden in der Textdatei "protokoll.txt" an die bereits vorliegenden Eintragungen angefügt.
Protok <u>o</u> llaufruf	[ALT] + [K]	öffnet die Textdatei "protokoll.txt".
Prot <u>o</u> koll in Zwischenablage	[ALT] + [T]	kopiert die Textdatei "protokoll.txt" in die Zwischenablage.
Protokoll l <u>ö</u> schen	[ALT]+ [Ö]	löscht den Inhalt der Datei "protokoll.txt".
Automatisch Prot <u>o</u> k.-Eintrag	[ALT] + [O]	aktiviert / deaktiviert den automatischen Protokolleintrag
(<u>2</u>) RCL	[ALT] + [2]	fügt den mit "STO" temporär gespeicherten Wert im Textfeld "Eingabe" ein
<u>R</u> unden auf 0	[ALT] + [R]	rundet für Ausgabewert <1E-12 auf 0
<u>S</u> tellenzahl	[ALT] + [S]	legt die Anzahl der Stellen fest, die ausgegeben werden (10 / 5 / 14)
Schrift <u>g</u> röße	[ALT] + [G]	verändert die Schriftgröße im Feld "Eingabe" und "Ausgabe".
Schrift <u>f</u> arbe	[ALT] + [C]	variiert die Schriftfarbe zwischen schwarz, weiß und blau.
(<u>1</u>) STO	[ALT] + [1]	speichert den in "Ausgabe" stehenden Wert
<u>Ü</u> bersicht	[ALT] + [Ü]	Tabellen ("Befehlsschaltflächen" und "Mathematische Funktionen")
<u>W</u> inkeleinheit	[ALT] + [W]	wechselt zwischen DEG, RAD und GRAD .
Eingabe-Hilfe (Menüeintrag)	[F8]	aktiviert / deaktiviert den Modus der automatischen Vervollständigung von Funktionsnamen
Menüleiste	[ALT] + [D]	ruft die Menüleiste auf ("Datei")
Menüleiste	[ALT] + [B]	ruft die Menüleiste auf ("Bearbeiten")
Menüleiste	[ALT] + [M]	ruft die Menüleiste auf ("Mathem. Funktionen")
Menü: "Einstellung" / "Hintergrund (Graphik) (schwarz / weiß)"	[ALT] + [3]	wechselt die Hintergrundfarbe im Graphikfenster zwischen "schwarz" und "weiß".
Menü: "Einstellung" /	[SHIFT] + [F2]	ruft die Kontrasteinstellung "Schwarze Schrift auf weißem Hintergrund" auf

"Kontrast" / "Schwarz auf Weiß"		
Menü: "Einstellung" / "Kontrast" / "Weiß auf Schwarz"	[SHIFT] + [F3]	ruft die Kontrasteinstellung "Weiße Schrift auf schwarzem Hintergrund" auf (siehe hierzu Abschnitt "Kontrasteinstellungen")
Menü: "Einstellung" / "Kontrast" / "NEIN"	[SHIFT] + [F1]	stellt zurück auf die Einstellung: "Farbige Befehls- und Textfelder"
Menü: "Einstellung" / "Kontrasteinstellung speichern ?" / JA		speichert beim Beenden die aktuelle Kontrasteinstellung
Menü: "Einstellung" / "Kontrasteinstellung speichern ?" / NEIN		schaltet beim Beenden auf die Kontrasteinstellung: "Farbige Befehls- und Textfelder" um
Menü: "Bearbeiten" / Textfeld "Zwischenspeicher"	[ALT] + [#]	setzt den Cursor in das Textfeld "Speicher"
Menü: "Einstellung" / "Brailleschrift (Funktionsgraph)" / Druckoption: "Schwellpapier"	[F6]	legt die für die Druckoption "Druck auf Schwellpapier" geeignete Schriftart fest
Menü: "Einstellung" / "Brailleschrift (Funktionsgraph)" / Druckoption: "TIGER-Drucker"	[F7]	legt die für die Druckoption "Druck mit TIGER-Drucker" geeignete Schriftart fest

Tab. 3: Beispiele

(Stellenzahl: 10; Winkeleinheit: DEG)

<u>Eingabe</u>	<u>Ausgabe</u>
2,34567 / 6,123 - 15,07	-14,68690838
2,34567 / (6,123 - 15,07)	-0,262173913
2,3^(tan(5,678))*4	4,345351947
2,3^(tan(5,678)*4)	1,392707339
(sin(9,8765))^2 + (cos(9,8765))^2	1
sin(9,8765)^2 + cos(9,8765)^2	1
sin(9,8765^2 + cos(9,8765)^2	"Eingabe nicht korrekt !"
sin^2(9,8765) + cos^2(9,8765)	"Eingabe nicht korrekt !"
(sqr(ln(exp(5))))^2	5
(exp(sqr(ln(5))))^2	12,64513407
cbinom(35 80 0,4)	0,7885110287
cbinom(35 80 0,4)-cbinom(20 80 0,4)	0,7849497301
cnorm(35,5 32 sqr(32*0,6))	0,787785804
cnorm(35,5 32 sqr(32*0,6)) - cnorm(19,5 32 sqr(32*0,6))	0,7856184754
Konvertierungen von einem Zahlensystem in ein anderes Zahlensystem:	
BIN(987)	&B1111011011
INVBIN(&B1111011011)	987
INVBIN(&B1111011012)	Eingabe nicht korrekt !
OKT(-56789999)	-&O330505757
INVOKT(-&O330505757)	-56789999

HEX(12345678)	-&HBC614E
INVHEX(-&H75BCD15)	-123456789
INVHEX(-&H75BCD150)	Überlauf !

Rechnen in verschiedenen Zahlensystemen:	
&B111111 + &B111110 ([STRG] + [B])	&B1111101 Dezimal: 125
&O56 - &O577 ([STRG] + [F8])	-&O521 Dezimal: -337
(&HAA)^3 ([STRG] + [H])	&H4AF768 Dezimal: 4913000
&H100 - 100 ([STRG] + [H])	&H9C Dezimal: 156

Rechnen mit komplexen Zahlen:	
(2,3 + 7,1i)*(3,1i - 2,1111) + i ([STRG] + [K])	(-26,86553-6,85881i)
(2,3 + 7,1i)*(3,1i - 2,1111) + i ([STRG] + [P])	(Betrag: 27,7272425026 Winkel: -2,8916306048 RAD)
exp(3+4i) ([STRG] + [K])	(-13,1287830815-15,2007844631i)
sin(1+i)	(1,2984575814+0,6349639148i)
asin(1,2984575814+0,6349639148i)	(1 + i)

Menüsteuerung

Für Nutzer, die die Kurzbefehle für den Aufruf der Befehlsschaltflächen noch nicht kennen, ist die Verwendung der Menüsteuerung zu empfehlen. Mit der Tastenkombination **[ALT] + [M]** gelangt man zu dem Menüthema **"Mathematische Funktionen"** (mit dem Unterpunkt **"Ende"**) und anschließend mit dem wiederholten Betätigen der Taste **[Cursor nach rechts]** zu den Menüthemen **"Bearbeiten"**, **"Programme"**, **"Einstellung"**, **"Hilfe"** und **"Info"** mit jeweils zahlreichen Unterpunkten. Es können alle Befehlsschaltflächen und alle verfügbaren mathematische Funktionen aufgerufen werden. Im letzteren Fall wird das Funktionssymbol (z.B. bei der Sinus-Funktion: **"sin(a)"**) in das Eingabefenster übertragen.

Fenstersteuerung

Die Bedienungsoberfläche überdeckt einen großen Bereich des Desktops. Mit **[F3]** oder dem Menübefehl "**Fenster Verkleinern / Vergrößern**" lässt sie sich verkleinern bzw. vergrößern. Alle Tastenkurzbefehle können weiterhin verwendet werden, auch wenn die zugehörigen Befehlsschaltflächen nicht sichtbar sind.

Einstellungsdaten

Über den Befehl "**Einstellung**" ([ALT] + [N]) ruft man eine Liste aller **Einstellungsdaten** (Winkeleinheit, Stellenzahl, Runden auf 0, Automatischer Protokolleintrag, Schriftgröße, Schriftfarbe, Eingabehilfe usw.) auf.

Diese Liste kann mit einem "Screenreader" ohne Probleme ausgelesen werden.

Kontrasteinstellungen

Schrift- und Hintergrundfarbe aller Befehlsschaltflächen können bei Bedarf geändert werden:

- I) Schwarze Schrift auf weißem Hintergrund ([SHIFT] + [F2] oder **Menü: "Einstellungen / Kontraste / Schwarz auf Weiß"**)
- II) Weiße Schrift auf schwarzem Hintergrund ([SHIFT] + [F3] oder **Menü: "Einstellungen / Kontraste / Weiß auf Schwarz"**).
- III) Farbige Befehls- und Textfelder ([SHIFT] + [F1] oder **Menü: "Einstellungen / Kontraste / normal"**)

Die aktuelle Kontrasteinstellung kann nach Beendigung des Programms über die Menüsteuerung gespeichert werden (**Menü: "Einstellungen / Kontrasteinstellung speichern ? / Speichern "**); andernfalls erscheint die Bedienungsoberfläche beim nächsten Start im Modus I) (farbige Befehlsschaltflächen).

Funktionsgraph

Nach dem Aufruf der Befehlsschaltfläche "**Funktionsgraph**" ([F2]) kann der Nutzer im Formular "**Funktionsgraph**" die Graphen von maximal zwei Funktionen ("**f(x)**") und ("**g(x)**") zeichnen lassen. Der Plot-Vorgang wird ausgelöst durch das Betätigen der Befehlsschaltfläche "**Plot**" ([ALT] + [P]). Das Argumentintervall muss vor dem Plot-Vorgang festgelegt werden (Tasten "**x-links**" und "**x-rechts**"). Das Wertintervall (Befehlsschaltflächen "**y-unten**" und "**y-oben**") kann ebenfalls festgelegt werden.

Gleichwertig hierzu kann man auch "**xx a| b| yy ymin| ymax|**" in das Fenster **f(x)** für die Festlegung des Argumentintervalls [a, b] und des Wertintervalls [ymin, ymax] eintragen. Das Trennungszeichen "|" muss jedem eingegebenen Zahlenwert folgen. Anstelle des Zeichens "|" kann auch das Zeichen ";" verwendet werden. Bei eingegebenem Zeichen "|" ohne vorausgehendem Zahlenwert wird der Inhalt des entsprechenden Fensters (**x-links**, **x-rechts**, **y-unten**, **y-oben**) gelöscht. Bei dem Eintrag "**n|**" bleibt der aktuelle Fensterinhalt unverändert.

Beispiele:

1.

xx -3,1| 8| yy -10| 10| x^2

Die Parabel **f(x) = x^2** wird in dem Intervall [-3,1..8] gezeichnet, wobei der Graph nach unten durch **ymin = -10** und nach oben durch **ymax = 10** begrenzt wird.

2.

xx n| 10| yy n| 8| x^2 - 2x

Das linke Ende des Definitionsbereichs **a** und das obere Ende des Wertebereichs **ymax** bleiben unverändert.

Die Parabel **f(x) = x^2 - 2x** wird in dem Intervall [-3,1...10] gezeichnet. Der Graph wird nach unten durch **ymin = -10** und nach oben durch **ymax = 8** begrenzt.

Weiteres Beispiel siehe Bild 14

3.

yy | n| sin(x)

Das Fenster **y-unten** wird gelöscht; sonst werden keine Veränderungen vorgenommen.

Die Sinuskurve **f(x) = sin(x)** wird daher in dem Intervall [-3,1...10] gezeichnet. Der Graph wird nach oben durch **ymax = 8** begrenzt.

Da kein Wert in dem Fenster **y-unten** steht, wählt das Programm während des Plot-Vorgangs den Wert so aus, dass der Graph der Funktion **f(x) = sin(x)** in dem betrachteten Intervall vollständig erscheint.

Wird dem Funktionsterm **f(x)** die Kennung "**fill**" vorgeschaltet, so "schraffiert" das Programm nach Ausführen des Plot-Befehls die Fläche zwischen dem Graphen von **f** und der x-Achse (bzw. zwischen dem Graphen von **f** und dem Graphen von **g**).

Beispiel:

Fenster f(x): fill xx -9| 9| x^2

Fenster $g(x)$: $2x + 1$

Weitere Beispiele siehe Bild 15 und Bild 16

Bildformate

Das Bildformat (Höhe : Breite) wird über die Befehlsschaltfläche "**H / Q**" eingestellt [**Hochformat: (1 : 0,87) und Querformat: (1 : 1,73)**]. Über die Taste "**1 : 1**" skaliert man die x-Achse und y-Achse im gleichen Maßstab. Die für den Sehbehinderten wichtige Option der Einstellung der Hintergrundfarbe steht über der Befehlsschaltfläche "**Hintergrund schwarz/weiß**" (**[ALT] + [3]**) zur Verfügung. Die gewählte Einstellung bleibt auch nach Abschalten des Programms erhalten.

Speichern und Ausdrucken von Graphiken

Nach dem Plot-Vorgang können die Graphen als "BMP-Dateien" abgespeichert (Befehlsschaltflächen **"Speichern Bild 1"** und **"Speichern Bild 2"**) oder (für die weitere Bearbeitung) in die Zwischenablage kopiert werden (Taste **"Kopieren in Zwischenablage"**). Der Speicherort sollte so festgelegt werden, dass ein eventuell installierter PC-Wächter nach dem Abschalten des Rechners die gerade gespeicherten Dateien nicht löschen kann.

Ein Ausdruck der Graphik erfolgt über das Anklicken der Befehlsschaltflächen **"Querformat" / "Hochformat"**. Im Fall einer Beschriftung der Koordinatenachsen in Brailleschrift kann zwischen einem **Ausdruck auf Schwellpapier ([F6])** und einem **Ausdruck mit Hilfe eines "TIGER"-Druckers ([F7])** gewählt werden.

(Menü: **"Einstellung" / "Brailleschrift (Funktionsgraph)" / Druckoptionen: "Druck auf Schwellpapier" oder "Druck mit TIGER-Drucker").**

Schnittpunkte zweier Graphen

Für das Zeichnen von zwei Funktionsgraphen sind in die Fenster "**f(x)**" ([ALT] + [F]) und "**g(x)**" ([ALT] + [G]) Terme einzutragen. Liniendicke und -farbe dieser Graphen können unabhängig voneinander eingestellt werden.

Wenn die Graphen f und g sich schneiden oder berühren, wird automatisch ein weiteres Fenster geöffnet, in dem die Schnitt(Berühr)punktkoordinaten aufgelistet sind. Die Automatik wird mit "**Schnittpkt. NEIN**" ([ALT] + [4]) abgestellt (und wenn erforderlich wieder aktiviert "**Schnittpkt. JA**" ([ALT] + [4])). Die Werte "**x-links**" (Voreinstellung: -5,5) und "**x-rechts**" (Voreinstellung: 5,5), die die Begrenzung des Bildbereiches nach links und rechts festlegen, sind so zu wählen, dass die Schnitt(Berühr)punkte nach dem "Plot"-Befehl in der Graphik auftreten. Diese Werte sollten jedoch nicht "zu großzügig" gewählt werden, da andernfalls die Schnitt(Berühr)punktkoordinaten u.U. ungenau oder unvollständig berechnet werden.

Für die graphische Bestimmung der **Nullstellen einer Funktion f(x)** verwendet man für **g(x)** die "**Nullfunktion**" (d.h.: In das Textfenster **g(x)** trägt man "0" ein.).

Für die Bestimmung der **Lösungen einer Gleichung in der Unbekannten x** setzt man in das **Fenster f(x)** den **linksseitigen Gleichungsterm** und in das **Fenster g(x)** den **rechtsseitigen Gleichungsterm** ein.

Für eine genauere Bestimmung der Lösungen einer Gleichung in einer Unbekannten s. Abschnitt "**Gleichungen**" !

Weiteres Beispiel siehe Bild 14

Graphische Darstellung von Punkten und Streckenzügen (Polygonen)

Für die Darstellung von einzelnen Punkten gibt man deren Koordinaten mit einem vorangestellten **"P"** in das Fenster **"g(x)"** ([ALT] + [G]) ein:
"P (a | b) (c | d) (e | f)..." oder **"P (a ; b) (c ; d) (e ; f)..."**. Um die Übersichtlichkeit zu steigern, können die Punkte zusätzlich benannt werden z.B.:

"P R(a ; b) S(c ; d) T(e ; f)...".

Mit einem vorangestellten **"G"** werden diese Punkte zusätzlich durch Strecken miteinander verbunden: **"G (a ; b) (c ; d) (e ; f)..."**

Mit einem vorangestellten **"O"** werden nur diese Verbindungsstrecken gezeichnet: **"O (a ; b) (c ; d) (e ; f)..."**

Punktgröße und Liniendicke können durch Eingabe der ganzzahligen Werte -4; -3; ..., 0; 1; 2; usw. gesteuert werden.

Beispiel siehe Bild 20 !

Für größere Messreihen müssen zahlreiche Datenpaare ermittelt und in das Fenster **"g(x)"** ([ALT] + [G]) eingetragen werden; diese Datenpaare sind daher nur ausschnittsweise sichtbar. Für das Navigieren innerhalb dieses Fensters sind die Tasten "Rechtspfeil" oder "Linkspfeil" zu verwenden.

Der aktuelle Inhalt des Fensters **"g(x)"** wird mit [ALT] + [G] markiert.

Anschließend kann er mit der Taste [ENTF] gelöscht werden.

Die Eingabe vieler Datenpaare ist mühsam und fehleranfällig. Es wird daher empfohlen, die in dem Formelprogramm **"LiTeX"** angebotene Eingabetechnik (dreispaltige Tabelle mit automatischer Nummerierung) zu verwenden. Die Datenreihe kann dann über die Zwischenablage in das Fenster **"g(x)"** eingefügt werden ([STRG] + [V]).

Näheres hierzu finden Sie in dem Vorspann von LiTeX: **Beschreibung spezieller LiTeX-Befehle zum Programm "Termevaluator"**
(Siehe auch folgender Abschnitt: "Koordinateneingabe")

Koordinateneingabe

Die Eingabe der Koordinaten einzelner Punkte $P(a|b)$ $(c|d)$ usw. (siehe Abschnitt: "Graphische Darstellung von Punkten und Streckenzügen ") gestaltet sich besonders einfach, wenn man im Hauptfenster "Termevaluator4.3" unter "Eingabe" zuerst die Bezeichnung "P", dann die Bezeichnung "x" also die Zeichenfolge „**P x**“ **einträgt**. Nach **[ENTER]** erscheint im Textfenster „Eingabe“: „**Px y x y** “. Man schreibt hinter „x“ die x-Koordinate, hinter „y“ die y-Koordinate und setzt die Zeichenfolge entsprechend fort.

Beispiel: „**Px1 y5 x2 y12 x3 y16 x4 y21 x5 y32 x6 y39 x7 y43**“

Nach **[ENTER]** erscheint im Formblatt "Funktionsgraph" -Textfeld **g(x)** die Darstellung "**P(a|b) (c|d)** usw."

im Beispiel: „ **P(1|5)(2|12)(3|16)(4|21)(5|32)(6|39)(7|43)**“

Nach **[ENTER]** wird die entsprechende Punktfolge gezeichnet.

Ersetzt man die Kennung "P" im Hauptfenster durch "A", so werden nach

[ENTER] zusätzlich die **Gleichung der Ausgleichsgeraden** und der **Korrelationskoeffizient** in einem gesonderten Textfenster ausgegeben.

Nach zweimaligem **[ENTER]** werden jetzt die **entsprechende Punktfolge** und die **Ausgleichsgerade** – zeitverzögert - gezeichnet.

Kurven mit impliziter Gleichung: $F(x | y) = 0$

Für die Programmierung von Kurven mit impliziter Gleichung wird die Kennung „**KURVE**“ in das Textfeld „Eingabe“ des Startformulars „Termevaluator4.3“ eingetragen. Nach **[ENTER]** erscheint im Textfeld „Eingabe“:

„**KURVE** |**xa -20|xe 20| ya -20|ye 20|F(x|y) =** |“.

Nach dem Eintragen des Terms $F(x|y)$ und **[ENTER]** zeichnet das Programm in dem Rechteck $(x | y)$ mit $[xa \leq x \leq xe]$ und $[ya \leq y \leq ye]$ die durch die Gleichung $F(x|y) = 0$ festgelegte Kurve. (Die Voreinstellungen für x_a , x_e , y_a und y_e können zuvor geändert werden.) Aufgrund der zahlreichen und aufwendigen Rechnungen wird die Graphik erst verzögert erstellt.

Beispiel1:

„**KURVE** |**xa-10|xe15|ya-10|ye10|F(x|y)=0.5*x^2+0.9*y^2-x*y-3*x|**“
siehe [Bild 48](#)

Beispiel2:

$F(x|y)=x*\sin(x) - y*\sin(y)$ (x und y im Bogenmaß (RAD))
„**KURVE** |**xa-20|xe20|ya-20|ye20| F(x|y)=x*sin(x) – y*sin(y) |**“
siehe [Bild 49](#)

Anmerkungen:

1.

Für den „Plot“-Vorgang wird das Intervall $[x_a \dots x_e]$ nach Voreinstellung in 150 Teilabschnitte zerlegt. Soll die Anzahl der Teilabschnitte (zur präziseren Darstellung) erhöht werden, trägt man die gewünschte Anzahl (maximal **500**) zusätzlich ein. Dabei erhöht sich die Bearbeitungszeit.

Beispiel:

„**KURVE** |**xa-10|xe15|ya-10|ye10|F(x|y)=0.5*x^2+0.9*y^2-x*y-3*x|300**“

2.

Wenn der Maßstab auf der x- und y-Achse gleich groß sein soll, klickt man nach dem „Plot“-Vorgang das Befehlsschaltfeld „**1 : 1**“ im Formular „Funktionsgraph“ (**[ALT] + [6]**) an.

Kurven mit Parametergleichungen: $x = x(t)$; $y = y(t)$

Für die Programmierung von parametrisierten Kurven wird die Kennung „**PKURVE**“ in das Textfeld „Eingabe“ des Startformulars „Termevaluator4.3“ eingetragen. Nach **[ENTER]** erscheint im Textfeld „Eingabe“:

„**PKURVE** |**ta 0|te 20|** $x(t)=$ | $y(t)=$ |“

Nach dem Eintragen der Terme $x(t)$, $y(t)$ und **[ENTER]** zeichnet das Programm in dem Intervall $[ta \leq x \leq te]$ die durch die Parametergleichungen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ festgelegte Kurve. (Die Voreinstellungen für ta und te können zuvor geändert werden.)

Beispiel1:

„Logarithmische Spirale“: $x(t)=\ln(t)*\cos(t)$ | $y(t)=\ln(t)*\sin(t)$

„**PKURVE** |**ta1|te80|** $x(t)=\ln(t)*\cos(t)$ | $y(t)=\ln(t)*\sin(t)$ |“

siehe [Bild 50](#)

Beispiel2:

„Wurfparabel“: $x(t) = 9*\cos(45)*t$ | $y(t)= 9*\sin(45)*t-9,81/2*t^2$

„**PKURVE** |**ta0|te2.5|** $x(t)=15*\cos(45)*t$ | $y(t)=15*\sin(45)*t-9.81/2*t^2$ |“

siehe [Bild 51](#)

Anmerkungen:

1.

Für den „Plot“-Vorgang wird das Intervall $[ta...te]$ nach Voreinstellung in 500 Teilabschnitte zerlegt. Soll die Anzahl der Teilabschnitte (zur präziseren Darstellung) erhöht werden, trägt man die gewünschte Anzahl (maximal **2000**) zusätzlich ein. Dabei erhöht sich die Bearbeitungszeit.

Beispiel:

„**PKURVE** |**ta-4|te4|** $x(t)=10*\sin(t)$ | $10*\cos(t^2)$ |**1000**“

2.

Wenn der Maßstab auf der x- und y-Achse gleich groß sein soll, klickt man nach dem „Plot“-Vorgang das Befehlsschaltfeld „**1 : 1**“ im Formular „Funktionsgraph“ (**[ALT] + [6]**) an.

Integration (graphisch)

Für die Berechnung eines Integrals setzt man in das Fenster "f(x)" ([ALT] + [F]) den Funktionsterm (Integranden), in das Fenster "x-links" [ALT] + [L] die untere Grenze a und in das Fenster "x-rechts" [ALT] + [R] die obere Grenze b ein. In das Fenster "g(x)" trägt man den Ausdruck "Int" ein. Mit "Plot" wird der Graph gezeichnet und zusätzlich das Integral ausgewertet.

(Für eine genauere Integralberechnung s. Abschnitt "**Integration (numerisch)**")

Gleichwertig ist der Eintrag "**INT xx a| b| Funktionsterm**" in das Fenster f(x). Durch Hinzufügen der Kennung "**fill**" wird die dem Integral entsprechende Fläche "schraffiert".

Beispiel:

"FILL INT xx -7| 9| x^2 + 1"

Ein weiteres Beispiel findet man in Bild 19.

Tab. 4: Funktionsgraph
Reihenfolge beim Durchgang mit der TAB-Taste

<u>Bezeichnung</u>	<u>Tasten-</u> <u>kombination</u>	<u>Funktion</u>
Funktionsterm <u>f</u> (x)	[ALT] + [F]	Der Funktionsterm f (z.B.: " $x^2 + 3 \cdot x$ ") ist an der vom Cursor festgelegten Position einzutragen.
Liniend <u>i</u> cke f	[ALT] + [I]	Die Liniendicke des Graphen von f ist durch einen (im rechten Fenster einzutragenden) Zahlenwert festzulegen. Vorgabe: "3"
Linienfar <u>b</u> e f	[ALT] + [B]	Die Farbe des Graphen von f wechselt zwischen rot, grün, schwarz und blau.
Funktionsterm <u>g</u> (x)	[ALT] + [G]	Der Funktionsterm g (z.B.: " $\cos(x)$ ") ist an der vom Cursor festgelegte Position einzutragen.
Liniend <u>i</u> cke g	[ALT] + [D]	Die Liniendicke des Graphen von g ist durch einen (im rechten Fenster einzutragenden) Zahlenwert festzulegen. Vorgabe: "8"
Linienfar <u>b</u> e g	[ALT] + [E]	Die Farbe des Graphen von g wechselt zwischen rot, grün, schwarz und blau.
Linie g (nicht) pun <u>k</u> tiert	[ALT] + [N]	Der Graph von g wird punktweise dargestellt. (NEIN / JA)
x- <u>l</u> inks	[ALT] + [L]	Die linke Begrenzung des Koordinatensystems ist an der durch den Cursor festgelegten Position einzutragen. (Voreinstellung: "-5")
x- <u>r</u> echts	[ALT] + [R]	Die rechte Begrenzung des Koordinatensystems ist an der durch den Cursor festgelegten Position einzutragen. (Voreinstellung: "5")
y- <u>u</u> nten	[ALT] + [U]	Die untere Begrenzung des Koordinatensystems ist an der durch den Cursor festgelegten Position einzutragen.
y- <u>o</u> ben	[ALT] + [O]	Die obere Begrenzung des Koordinatensystems ist an der durch den Cursor festgelegten Position einzutragen.

Beschriftung Koordinatenachsen	[ALT] + [C]	Die Koordinatenachsen werden (wahlweise) in Schwarzschrift (SB) oder Blistabaille (BL) oder Eurobraille (EU) beschriftet.
<u>P</u>lot	[ALT] + [P]	löst den Plot-Vorgang aus.
<u>Q</u>uerformat Druck	[ALT] + [Q]	Die Graphik wird im Querformat ausgedruckt.
<u>K</u>opieren in Zwischenablage	[ALT] + [K]	Die Graphik wird in die Zwischenablage kopiert.
<u>Z</u>urück	[ALT] + [Z]	Das Formular "Funktionsgraph" wird gelöscht. Das Hauptformular "Termevaluator (Standard)" wird geöffnet.

Die folgenden Befehle lassen sich nur über die zugehörigen Tastenkombinationen oder durch das Anklicken des Tastenfeldes ausführen.

(6) 1 : 1	[ALT] + [6]	x-Achse und y-Achse werden im gleichen Maßstab skaliert.
Q <u>_</u> H	[ALT] + [/]	Die Bildformat (Höhe : Breite) wechselt zwischen (1 : 1,73) und (1 : 0,87) .
Gitterpunkt JA / NEIN (<u>5</u>)	[ALT] + [5]	Punkte mit ganzzahligen Koordinaten werden (gleichmäßig über das Koordinatensystem verteilt) markiert.
Hintergrund (Grafikfenster) (schwarz / weiß) (<u>3</u>)	[ALT] + [3]	Die Hintergrundfarbe wechselt zwischen "schwarz" und "weiß".
<u>H</u>ochformat Druck	[ALT] + [H]	Die Graphik wird im Hochformat ausgedruckt.
Invertierung g	[ALT] + [V]	Der Graph von g wird durch weiße Punkte unterbrochen, wenn der Modus "Linie g <u>p</u> unktiert" aktiviert ist.
Linien<u>s</u>tärke Kordinatenachsen	[ALT] + [Ä]	Die Dicke der KO-Achsen wird stufenweise geändert (1/2/3/0=nicht sichtbar).
Punkteab<u>s</u>tand g vergröß<u>e</u>rn	[ALT] + [ß]	Der Abstand zwischen den Punkten des Graphen g wird vergrößert.
Punkteab<u>s</u>tand g verklein<u>e</u>rn	[ALT] + [S]	Der Abstand zwischen den Punkten des Graphen g wird verkleinert.
(<u>+</u>) Punkte verschieben	[ALT] + [+]	Die Punkte des Graphen g werden nach rechts verschoben.
(<u>-</u>) Punkte zurück schieben	[ALT] + [-]	Die Punkte des Graphen g werden nach links verschoben.

Schnittpkt. JA / NEIN (4)	[ALT] + [4]	Die Koordinaten vorliegender Schnittpunkte werden aufgelistet.
Speichern Bild <u>1</u>	[ALT] + [1]	Das aktuelle Bild wird an dem durch den Anwender festgelegten Standort als "bild1.bmp" gespeichert.
Speichern Bild <u>2</u>	[ALT] + [2]	Das aktuelle Bild wird an dem durch den Anwender festgelegten Standort als "bild2.bmp" gespeichert.
<u>W</u>inkeleinheit	[ALT] + [W]	Die Winkeleinheit wechselt zwischen DEG, RAD und GRAD .
(<u>y</u>) RESET	[ALT] + [Y]	Die Zahlenwerte für die Liniendicke werden auf "3" bzw. "8" zurückgestellt.
(<u>x</u>) Beispiele	[ALT] + [X]	Jeweils nach Betätigen dieser Taste wird eine neue Graphik generiert.
(nicht sichtbar) Druckoption: "Druck auf Schwellpapier"	[F6]	legt die für die Druckoption "Druck auf Schwellpapier" geeignete Schriftart fest
(nicht sichtbar) Druckoption: "Druck mit TIGER-Drucker"	[F7]	legt die für die Druckoption "Druck mit TIGER-Drucker" geeignete Schriftart fest
(nicht sichtbar) ENDE	[F4] [ALT] + [F4]	beendet das Programm

Die folgenden Befehle lassen sich nur über die zugehörigen Kennungen, die im Textfenster " $\underline{f}(x)$ " dem Funktionsterm vorausgehen müssen, ausführen.

Textfenster "x-links" und "x-rechts"	Fenster $\underline{f}(x)$: "xx a b Funktionsterm"	Die Zahlenwerte a bzw. b werden in die Textfenster "x-links" bzw. "x-rechts" eingetragen.
Textfenster "x-links" und "x-rechts"	Fenster $\underline{f}(x)$: "xx n Funktionsterm"	Das Textfenster "x-links" wird gelöscht. Der aktuelle Inhalt des Textfensters "x-rechts" bleibt unverändert.
Textfenster "y-unten" und "y-oben"	Fenster $\underline{f}(x)$: "yy a b Funktionsterm"	Die Zahlenwerte a bzw. b werden in die Textfenster "y-unten" bzw. "y-oben" eingetragen.
Textfenster "y-unten" und "y-oben"	Fenster $\underline{f}(x)$: "yy n Funktionsterm"	Der aktuelle Inhalt des Textfensters "y-unten" bleibt unverändert Das Textfenster "y-oben" wird gelöscht.
Textfenster "y-unten" und "y-oben"	Fenster $\underline{f}(x)$: "yy Funktionsterm"	Die aktuellen Inhalte der Textfenster "y-unten" und "y-oben" werden gelöscht.
Integralberechnung	"Int Funktionsterm"	Das Integral über $f(x)$ in den Grenzen "x-links" u. "x-rechts" wird berechnet.
Flächenkennzeichnung	"Fill Funktionsterm"	Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse (bzw. zwischen dem Graphen der Funktion f

		und dem Graphen der Funktion g) wird schraffiert.
--	--	------------------------------------------------------

Beendigung

Alle aktuellen Einstellungen (Schriftfarbe, Schriftgröße, Hintergrundfarbe, Winkeleinheit, Stellenzahl) werden gespeichert, wenn das Programm mit **[F4]** oder **[ALT] + [F4]** abgeschlossen wird. Diese Einstellungen bleiben auch nach Abschalten des Betriebssystems Windows erhalten, sofern kein PC-Wächter die Dateien schützt.

Unterprogramme zu „Termevaluator4.3“ - Beispiele

Code der gewählten Programmzeile (z.B. „BSP09“) eingeben und Taste [ENTER] drücken!

Code	Programmbefehl
	Umwandlung in ein anderes Zahlensystem
BSP00	BIN(12345)
BSP01	&H 567 + &H 7EF
	Rechnen mit komplexen Zahlen
BSP02	KOM(2,3 + 7,1i)*(3,1i - 2,1111) + i
BSP03	POL(2,3 + 7,1i)*(3,1i - 2,1111) + i
	Berechnungen mit 26-stelliger Genauigkeit
BSP04	DEZ 0,25*(sqrt(5)-1)
	Bruchrechnung
BSP05	BR 355 * (1+1/(7.1)) / (1-1/31) - 418
	Prozentrechnung
BSP06	GW 900 + PS 2,4 %
	Mittelwert / Standardabweichung
BSP07	DATEN 13 15 3 16 6 20 20 1 12 4 7 14 10 1 2
	Korrelationskoeffizient/Ausgleichs(Regressions)gerade
BSP08	Ax1 y5 x2 y12 x3 y16 x4 y21 x5 y32 x6 y39 x7 y43
	Funktionswertetabelle
BSP09	FUN -2 2 step 0,5 x^7
	Abschnittsweise definierte Funktionen
BSP10	FUN -3,5 4 0,5 (-2<=x<1)*(-2*x - 1) + (1<=x)*(5*(x-2)^2 - 8)
	Polynominterpolation
BSP11	POLY P x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x0 y-1 x1 y-5x 2y11 x3 y-3
	Splineinterpolation
BSP51	SPLINE xx-2,5 x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0
BSP52	SPLINE P x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0
	Nullstellen
BSP12	NULL -20 40 x^2-28x-90
BSP 53	NULLPOLY a_3 3 a_2 0 a_1 7 a_0 15
	Ableitung an der Stelle x
BSP13	ABL x= -1,3 f(x)= cos(x)/(x^2+1)
	Hoch--, Tiefpunkte
BSP14	MAX -20 20 x*(x^2 - 25)
	Wendepunkte / Krümmungsverhalten
BSP15	WEN -20 20 (x-1)*(12 - x)/30
	Integration (numerisch)

BSP16	INT -3 5 x^2-3x+1
	Abstand eines Punktes von einem Funktionsgraphen
BSP17	ABST -5 5 P 3 3 x^2+1
	Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$
BSP18	EXTR MAXMIN xa-20 xe20 ya-20 ye20 1/(1+abs(y*x))-(x+2)^2-(y+1)^2
	Maximum / Minimum der Funktion: $z = f(x,y)$ mit einer Nebenbedingung(NB)
BSP19	EXNB MAXMIN xa 0 xe 40 f(x,y) = x^2*y NB x = $40-2*y$
	Gleichungen (mit einer Unbekannten)
BSP20	GLG $3x^2+(x-3)*(5-2x) = -2$
	Lineare Gleichungssysteme
BSP21	GL3 {x + 0,5y - 2z = 1} {-2x -y + z = 0} {y -2z = 1}
	(Nicht)Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten
BSP22	GXY xa-20 xe20 ya-20 ye20 x+y-3 x-y^2
	Matrixverfahren GAUSS-JORDAN
BSP23	GAUSS 2 -31 6 - 4. 7 8 0
BSP24	GAUSS 3 3 4 -7 1 -4 5 6 2
	Matrixmultiplikation
BSP25	MAT*A 1 2 3 4 B 5 6 7 8
	Matrixaddition / -subtraktion
BSP26	MAT+A 1 2 3 4 B 5 6 7 8
BSP27	MAT-A 1 2 3 4 B 5 6 7 8
	Matrixpotenz
BSP28	PMAT E3 A 1 2 3 4
	Matrixinvertierung
BSP29	IMAT A 1 2 3 4
	Speicherung von Matrizen
BSP30	MAT+A 1 2 3 4 B 5 6 7 8 m3m5
BSP31	MATm9= 1 2 3 4
	Determinantenberechnung
BSP32	DET A 1 2 3 4
	Eigenwerte und --vektoren
BSP54	EIGEN A 1 2 3 4
BSP55	EIGSYM A -5 -8 -8 0 -8 -8 -2 2 -8 -2 9 4 0 2 4 -7
	Lineare Optimierung
BSP33	LOP AnzVAR 2 AnzNB 3 MAXMIN Z= 3 -2 KoeffNB -1 1 0 0 1 10 0,6 -1 -0,4
	Lote auf Geraden und (Hyper)Ebenen
BSP34	LOT 3 L1 2 3 7 8 -3 -4

	Skalar- und Vektor(Kreuz)produkt; Vektorbetrag
BSP35	VP (1,2 3,4 5,6)(1,1 2,2 3,3)
BSP36	SP (1,2 3,4 5,6)(-1,1 2,2 -1,1)
BSP37	VB (-1,1 2,2 -1,1)
	Summe (f(a) + f(a+h) +f(a+2h)+...+f(b))
BSP38	SUM 1 3 0,5 x^2
	Iterationen
BSP39	IT 10 5 x-(x^3-x^2-6x+1)/(3x^2-2x-6)
	Differenzialgleichungen (1. Ordnung)
BSP40	DGL-5 5,1 4 t/y
	Differenzialgleichungen (2. Ordnung)
BSP41	DGG 0 0 3 7 ys-y-cos(t)+sin(t)+2*t-3
BSP42	DGGYYS 0 0 3 10 - 12*sin(y)
BSP43	DGGY-YS 0 0 6,95 50 - 12*sin(y) - 0,1*ys
	Differenzialgleichungssysteme
BSP44	DGSXYT 0 0 5 1 x + y 4*x - 2*y
BSP45	DGSX-Y 0 2 1 12 3.8*x - 0.3*x*y 3.4*x*y - 4*y
	Koordinateneingabe
BSP46	Px1 y5 x2 y12 x3 y16 x4 y21 x5 y32 x6 y39 x7 y43
	Kurven mit impliziter Gleichung: F(x y) = 0
BSP47	KURVE xa-10 xe15 ya-10 ye10 F(x y)=0.5*x^2+0.9*y^2-x*y-3*x
	Kurven mit Parametergleichungen: x = x(t); y = y(t)
BSP48	PKURVE ta1 te80 x(t)=ln(t)*cos(t) y(t)=ln(t)*sin(t)
	Kurvenscharen
BSP49	SCHAR 100 xa-3 xb3 ca-4 cb4 step2 f(x)=c*x^2 + c
BSP50	SCHAR W 220 xa-1 xb5 ca-4 cb4 step1 f(x)=x^2*(x-c)
BSP51	
BSP52	
BSP53	
BSP54	
BSP55	

Bildbeispiele (Screenshots)

Bild 1

Gegeben f: $f(x) = 7 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2$

In Worten:

" $f(x) = 7 \cdot x$ hoch 4 - $3 \cdot x$ hoch 2"

Zu berechnen: $f(-1,5)$ und $f(\sqrt{5})$

In Worten:

" $f(-1,5)$ und $f(\text{Wurzel aus } 5)$ "

Eingabe des Funktionsterms

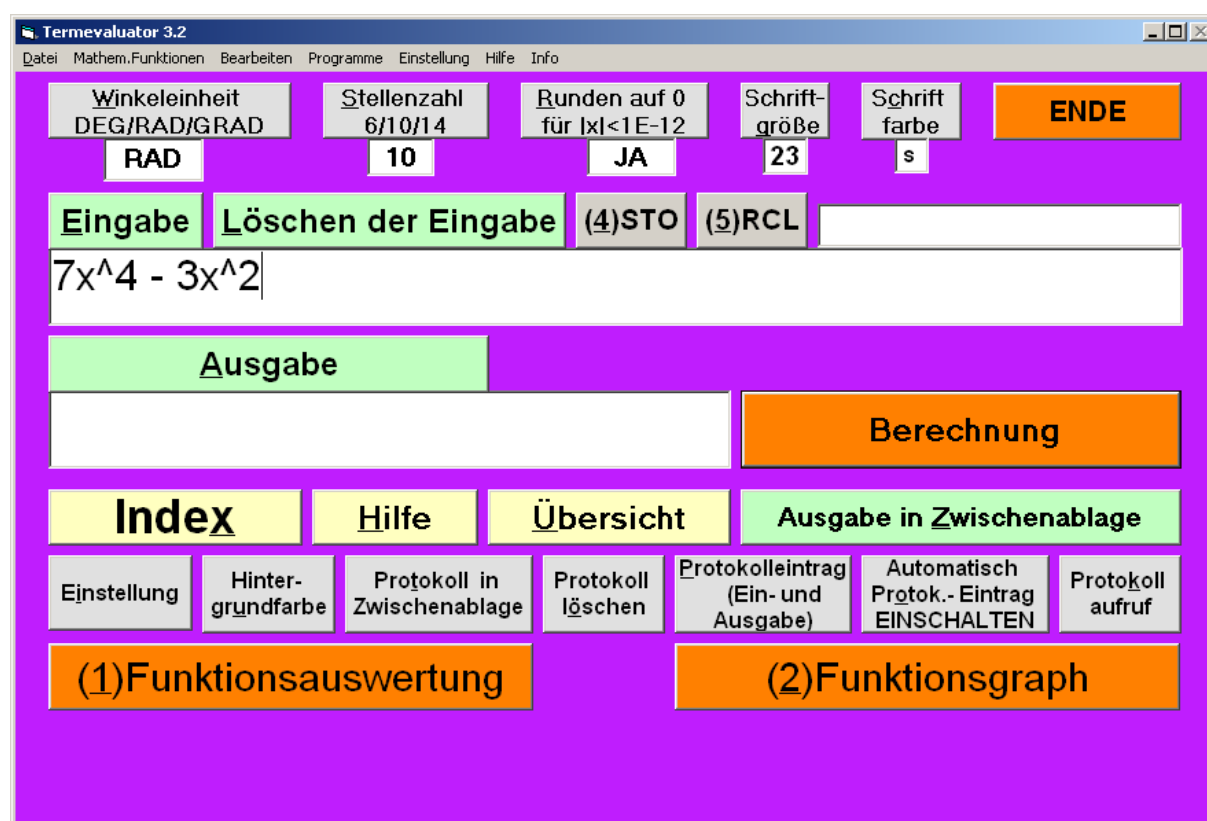


Bild 2

Eingabe x = -1,5

Funktionsterm

Term

Winkeleinheit
DEG/RAD/ GRAD

RAD

$7x^4-3x^2$

Geben Sie einen Wert für x / t ein !

-1,5

OK

Funktionsgraph

Zurück

Bild 3

Auswertung des Terms $f(-1,5)$

Funktionsauswertung

Term

$7 \cdot (-1,5)^4 - 3 \cdot (-1,5)^2$

Auswertung

28,6875

Protokolleintrag
(Term und
Auswertung)

OK

Bild 4

Eingabe $x = \text{sqrt}(5)$

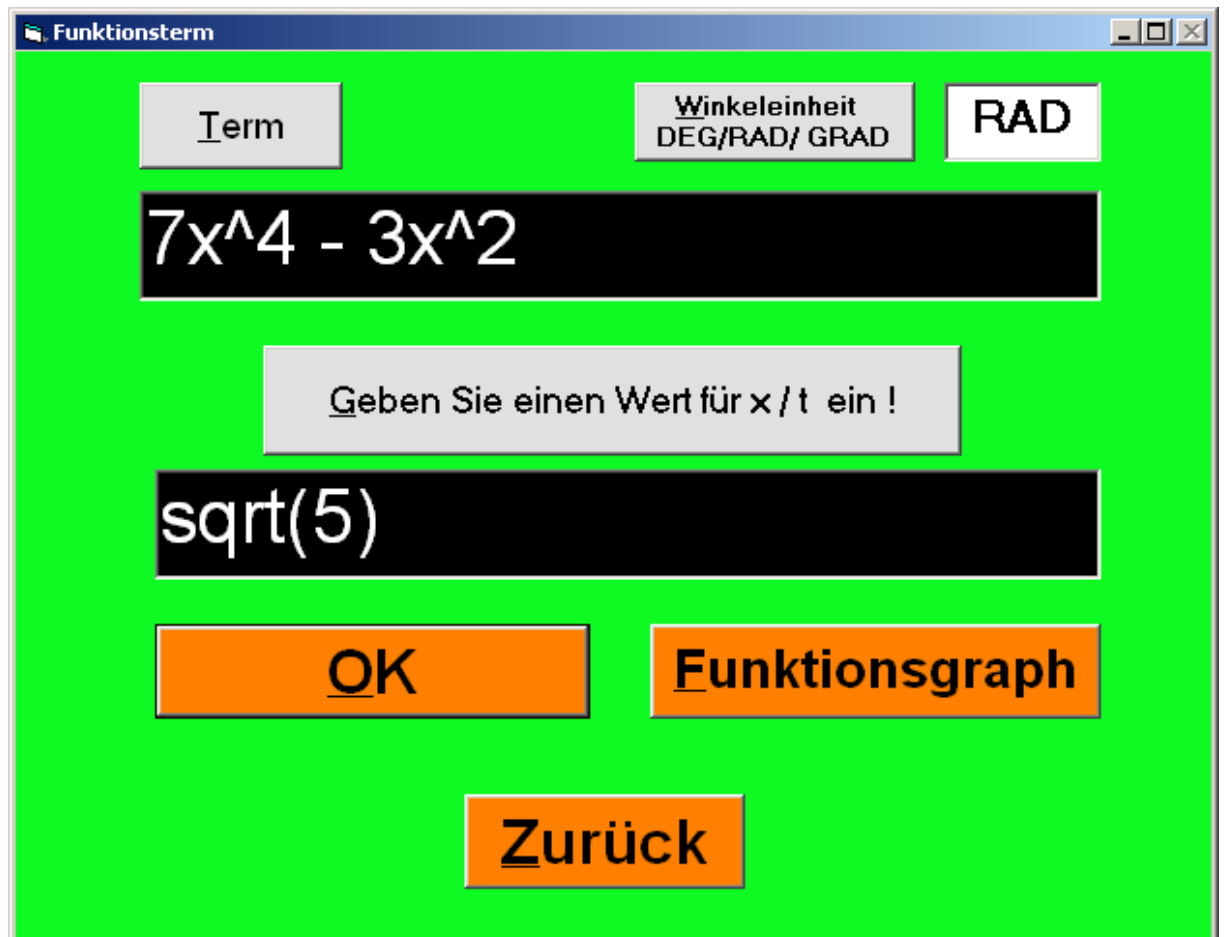


Bild 5

Auswertung des Terms $f(\sqrt{5})$

In Worten:

"f(Wurzel aus 5)"

Funktionsauswertung

Term

$7 \cdot 2,23607^4 - 3 \cdot 2,23607^2$

Auswertung

160

Protokolleintrag
(Term und Auswertung)

OK

Bild 6

Aufgabe:

Den Term

$$3/7 - 34/67 + 0,7 - 1/3,2$$

als Bruch schreiben

Eingabe: "BR 3/7 - 34/67 + 0.7 - 1/(3,2)"

Ausgabe: "11579 / 37520"

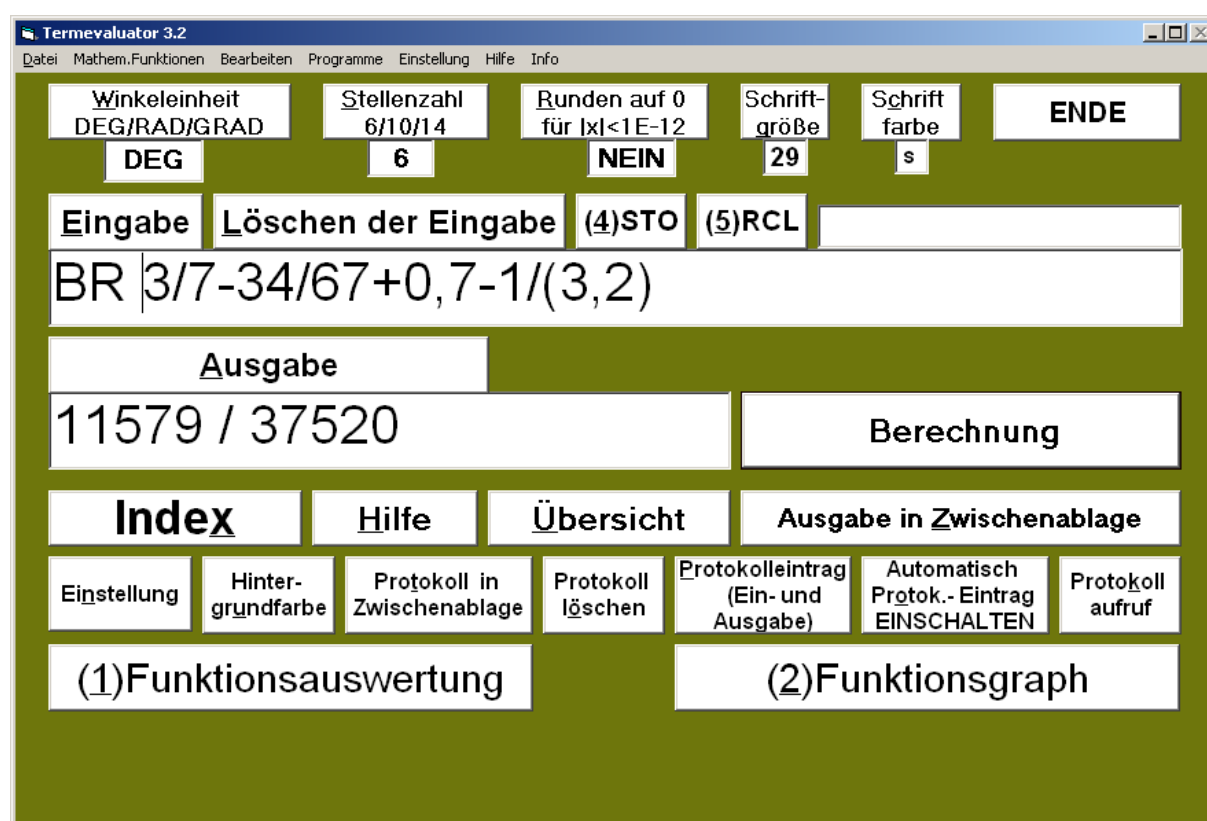


Bild 7

Rechnen mit komplexen Zahlen

[STRG] + [K]

oder

Eingabe: "KOM.....")

Aufgabe:

Den Term

$(1+3i)*(2-5i) - 2/(1-3i)$ ("i" = Imaginäre Einheit)

berechnen

Eingabe: "KOM (1+3i)*(2-5i) - 2/(1-3i)"

Ausgabe: "(16,8+0,4i)"

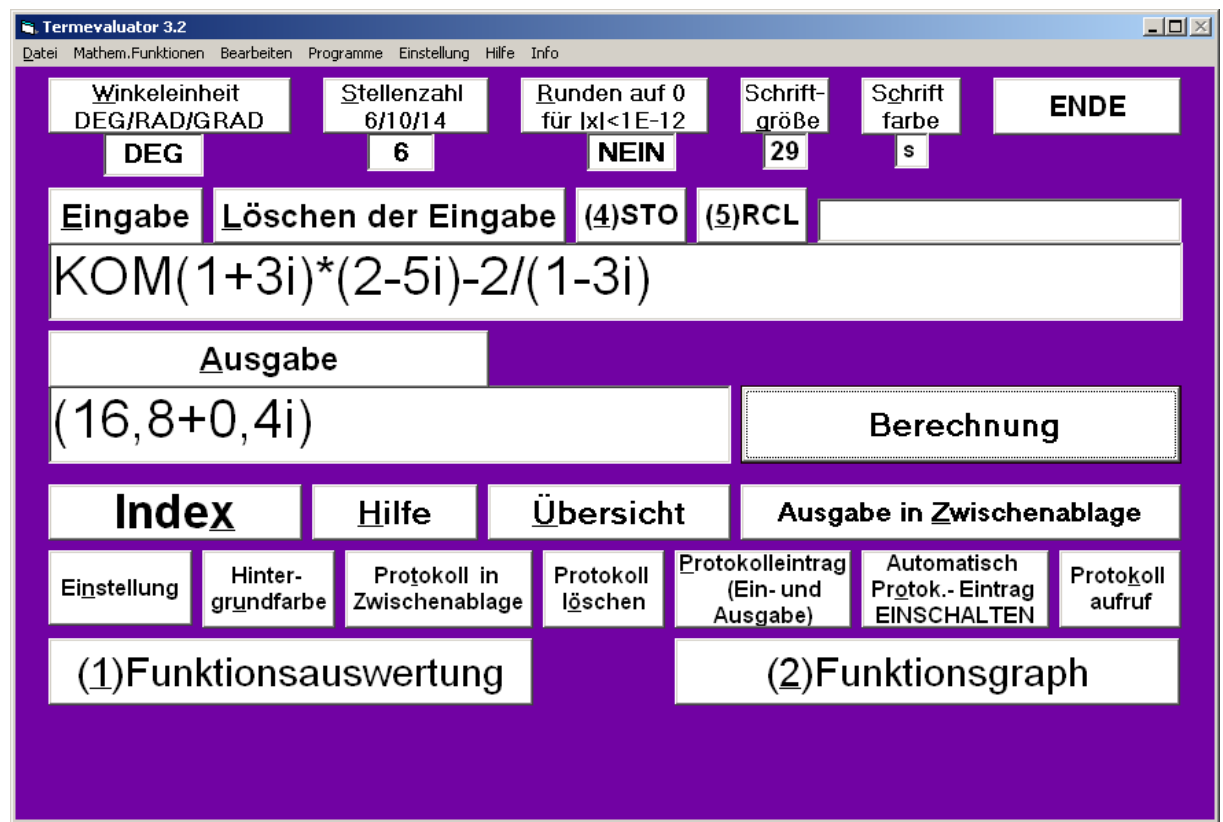


Bild 8

Aufgabe:

Dezimalzahl 12345 in Binärzahl umwandeln

Eingabe: "12345"

Ausgabe: "&B11000000111001"

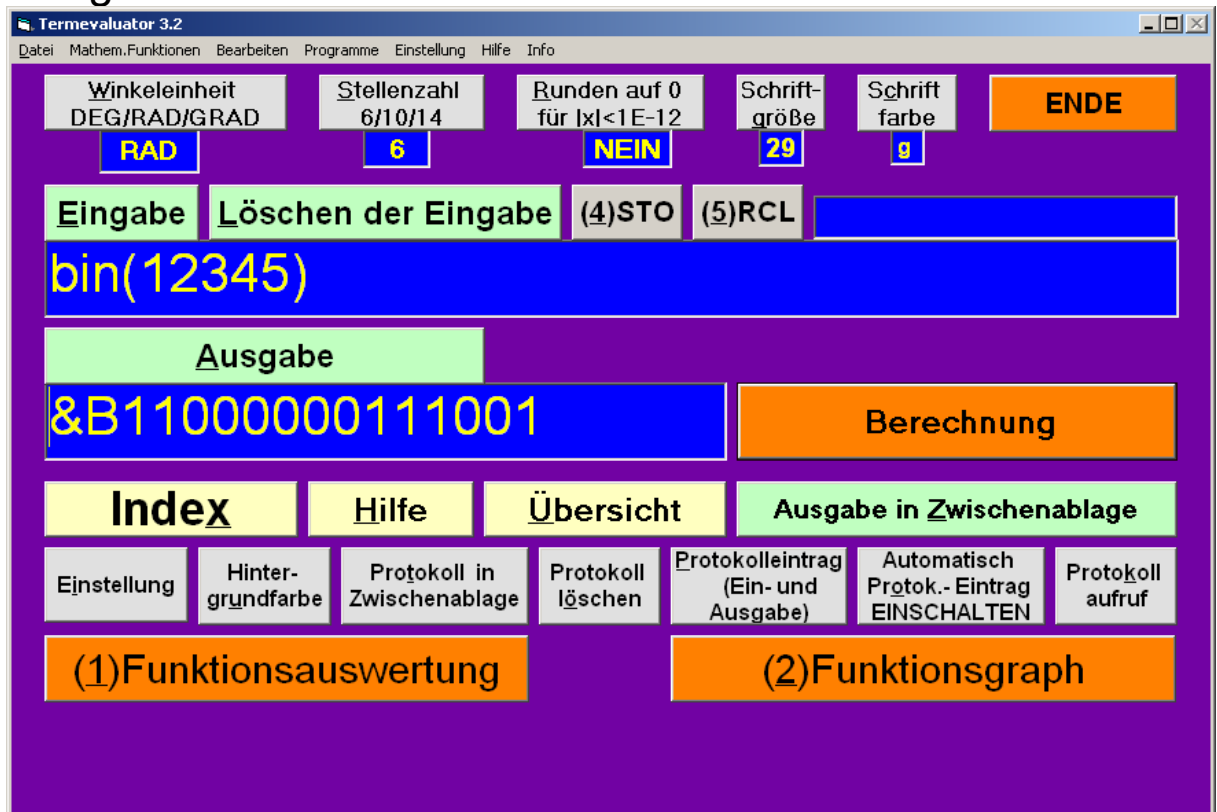


Bild 9

Aufgabe:

Die Hexadezimalzahlen &H 567 und &H 7EF addieren

Eingabe: "&H 567 + &H 7EF"

Ausgabe: "&HD56 Dezimal: 3414"

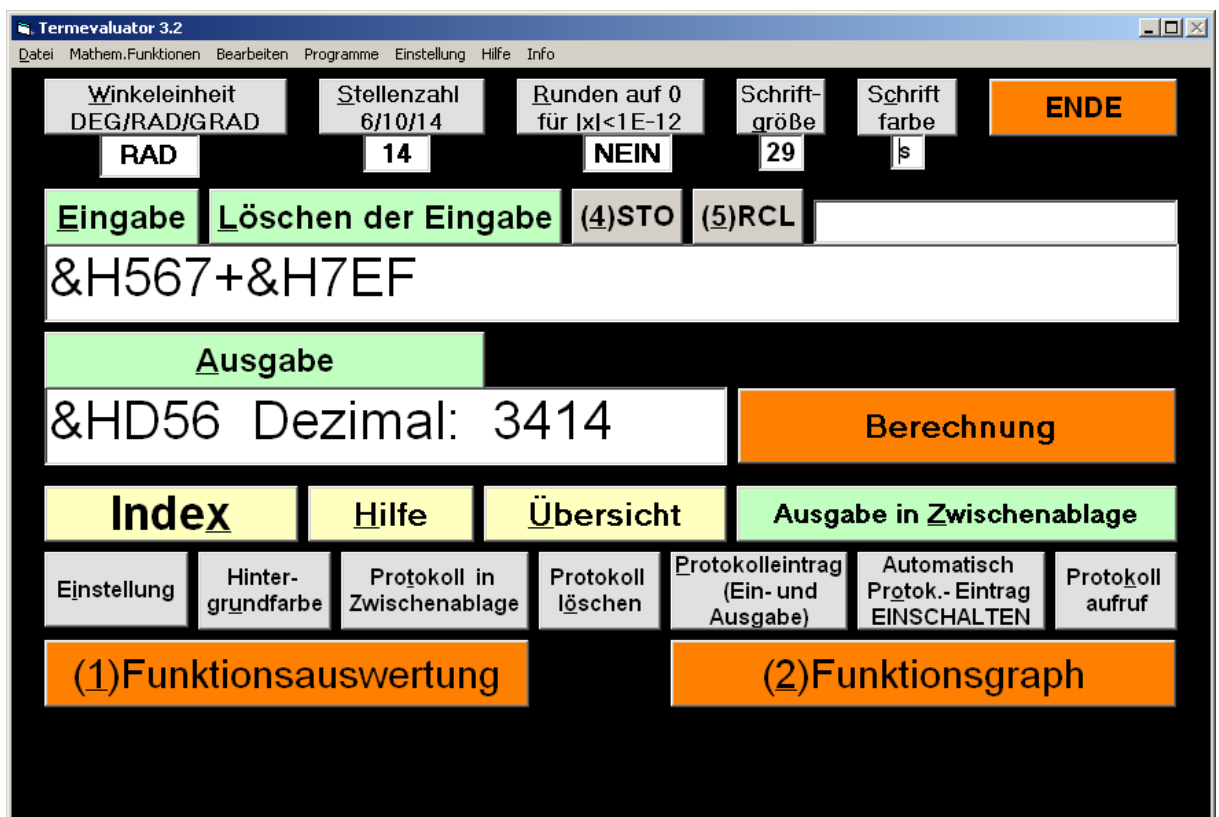


Bild 10

Aufgabe:

Das Integral von -3 bis 4 über die Funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ berechnen

Eingabe: "INT -3| 4| $x^2 \cdot \sin(x)$ "

Ausgabe: "-4,680077"

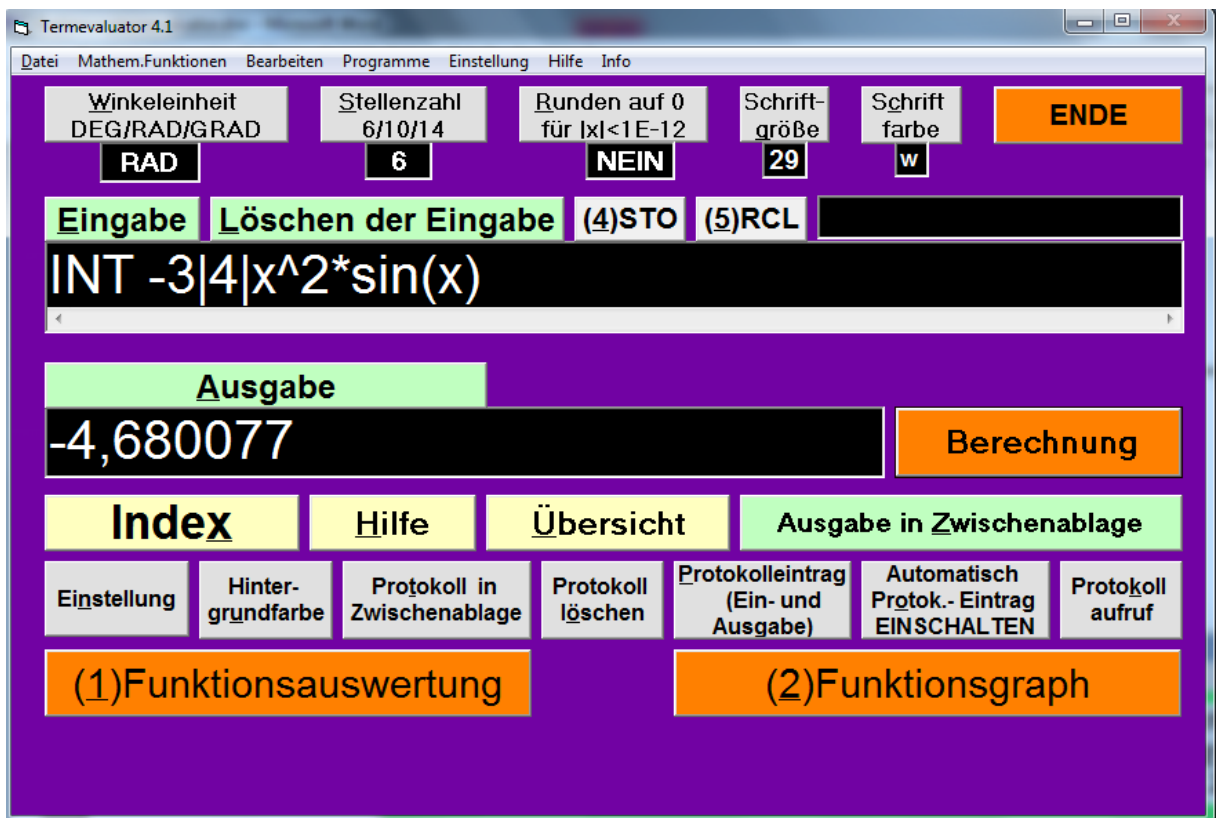


Bild 11

Aufgabe:

Die Nullstellen der Funktion $f(x) = 3x^2 + 7x - 10$ sind zu bestimmen..

Eingabe: "NULL -20|20|3x^2+7x-10"

Ausgabe: "-3,33333 | 1"

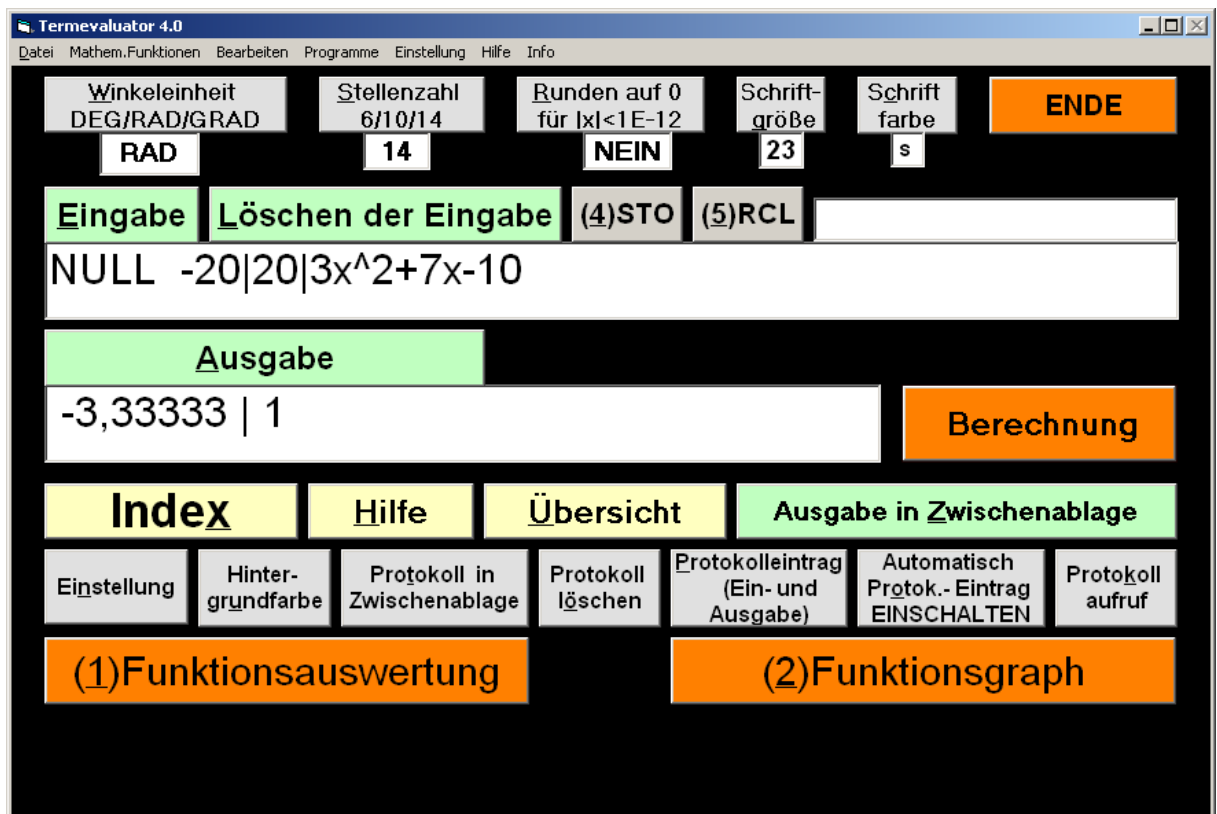


Bild 12

Aufgabe:

Die Lösungen der Gleichung

$$x - 100/x = x \cdot \sin(x) - 7$$

im Intervall $[-15 \dots 200]$ sind zu berechnen.

Eingabe: "GLG -15|20| $x - 100/x = x \cdot \sin(x) - 7$ "

Ausgabe: "(4 Lösungen)

-12,733608 | 8,878193 | 13,992153 | 14,209755"

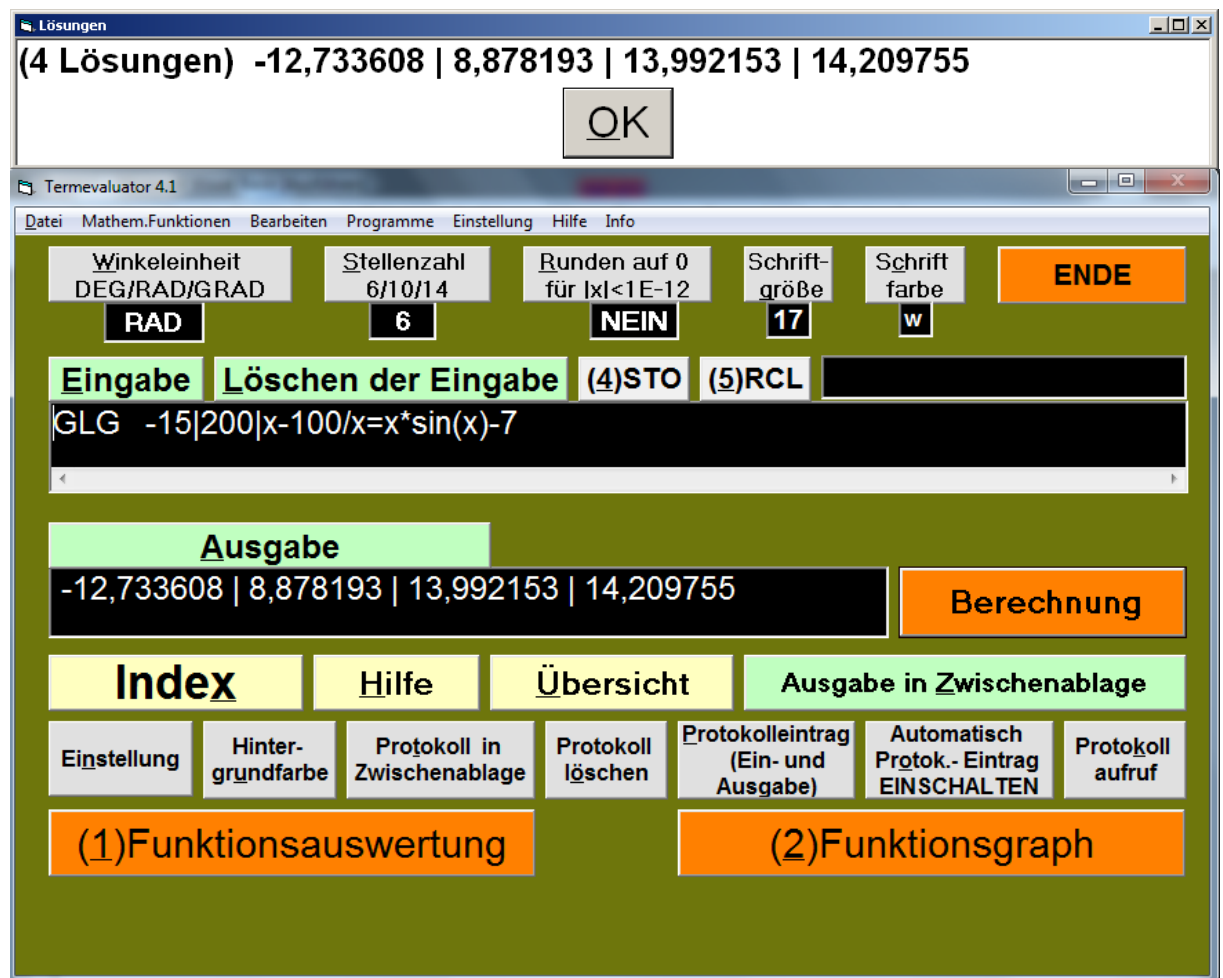


Bild 13

Aufgabe:

Die Lösung des Gleichungssystems

$$2x + 3y + 4z = 10$$

$$5x - 6y + 7z = 1$$

$$x - y = 0$$

ist zu ermitteln.

Eingabe: GL3{2x + 3y + 4z = 10}{5x - 6y + 7z = 1}{x - y = 0}

Ausgabe: {X=1,69231 | Y=1,69231 | Z=0,38462}

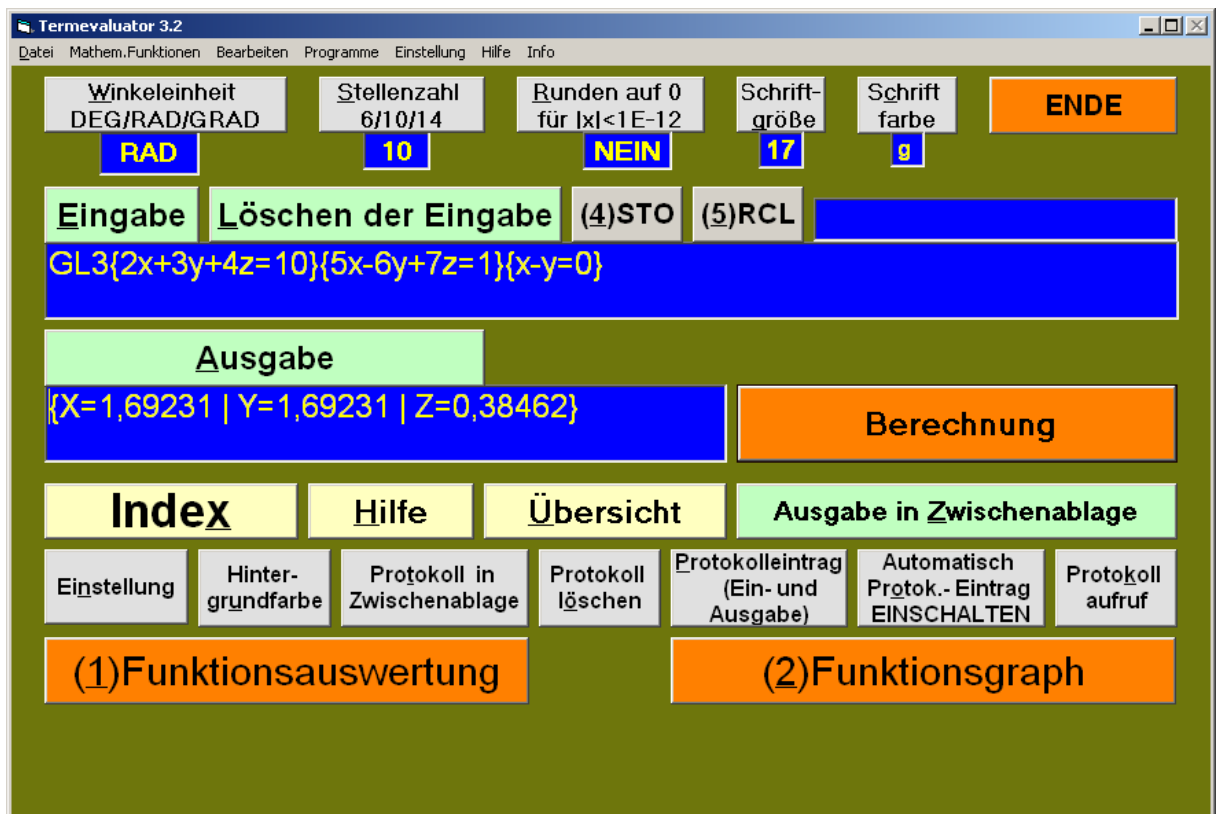


Bild 14

Aufgabe:

Gegeben

f: $f(x) = -x^2 + 10$

In Worten:

"f(x) = -x hoch 2 + 10"

und

g: $g(x) = 10 \cdot \cos(x)$

Es sollen die Graphen von f und g in dem Intervall

I: $-5 < x < 5$ mit Gitterpunkten unter Angabe der Schnittpunkte gezeichnet werden.

In Worten:

"Intervall I: -5 kleiner x kleiner 5"

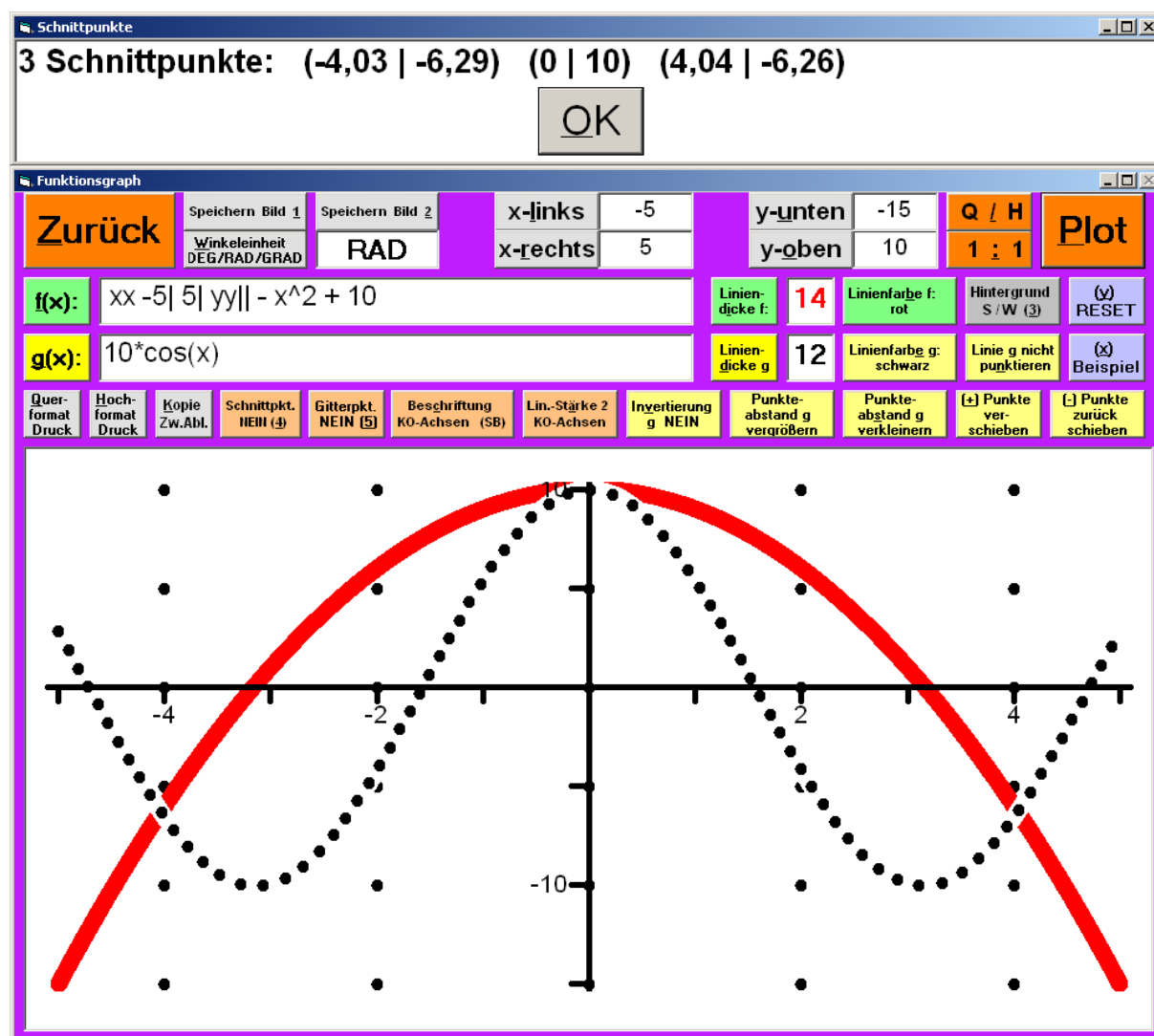


Bild 15

Aufgabe:

Gegeben

f: $f(x) = -x^2 + 10$

In Worten:

"f(x) = -x hoch 2 + 10"

und

g: $g(x) = 10 \cdot \cos(x)$

Es sollen die Graphen von f und g in dem Intervall

I: $-5 < x < 5$ mit Schraffur auf schwarzem Hintergrund gezeichnet werden.

In Worten:

"Intervall I: -5 kleiner x kleiner 5"

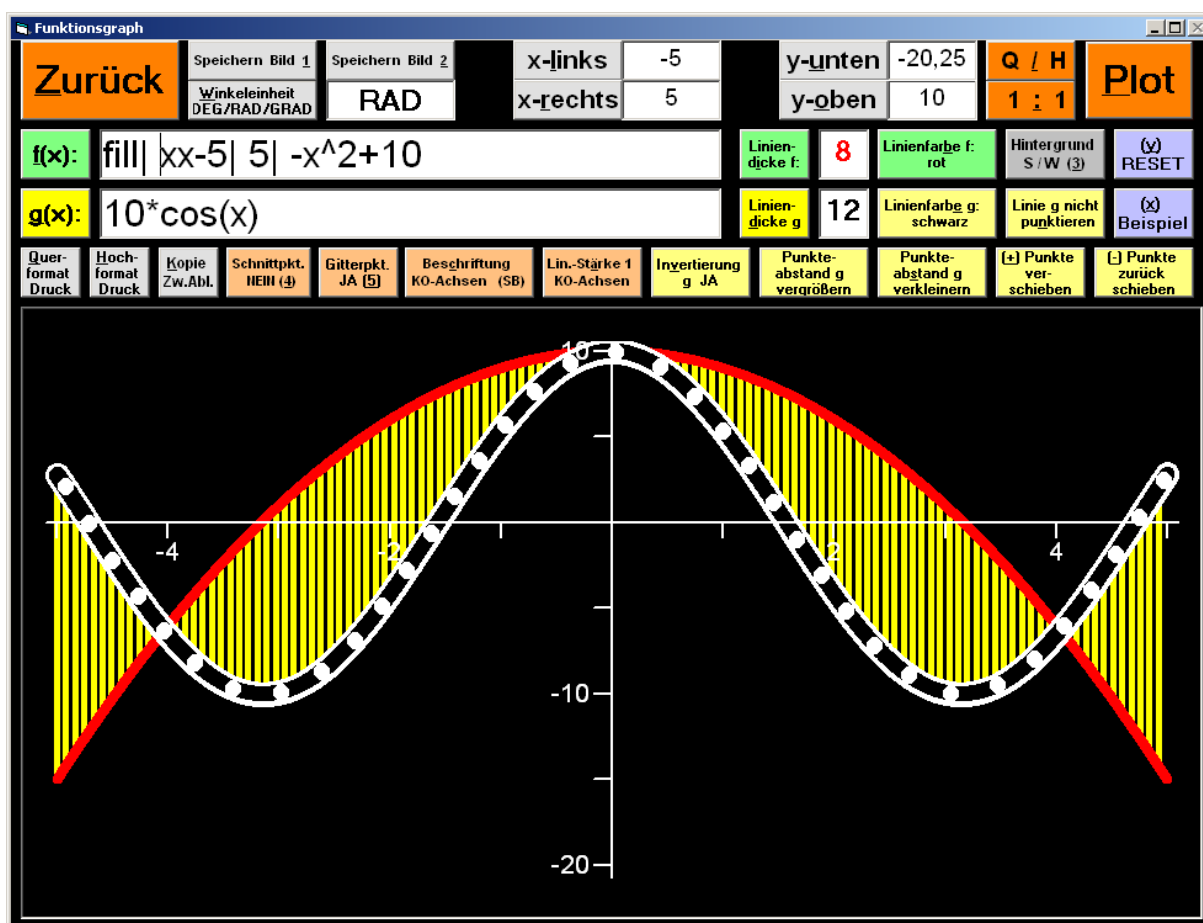


Bild 16

Aufgabe:

Gegeben

$$f: f(x) = x^2 + 10$$

In Worten:

"f(x) = x hoch 2 + 10"

und

$$g: g(x) = (x^2 + 10) \cdot \sin(x^2)$$

In Worten:

"g(x) = ((x hoch 2) + 10) * sin(x hoch 2)"

Die Graphen von f und g sollen in dem Intervall I:

-5 < x < 5 mit Schraffur und Gitterpunkten gezeichnet werden.

In Worten:

"Intervall I: -5 kleiner x kleiner 5"

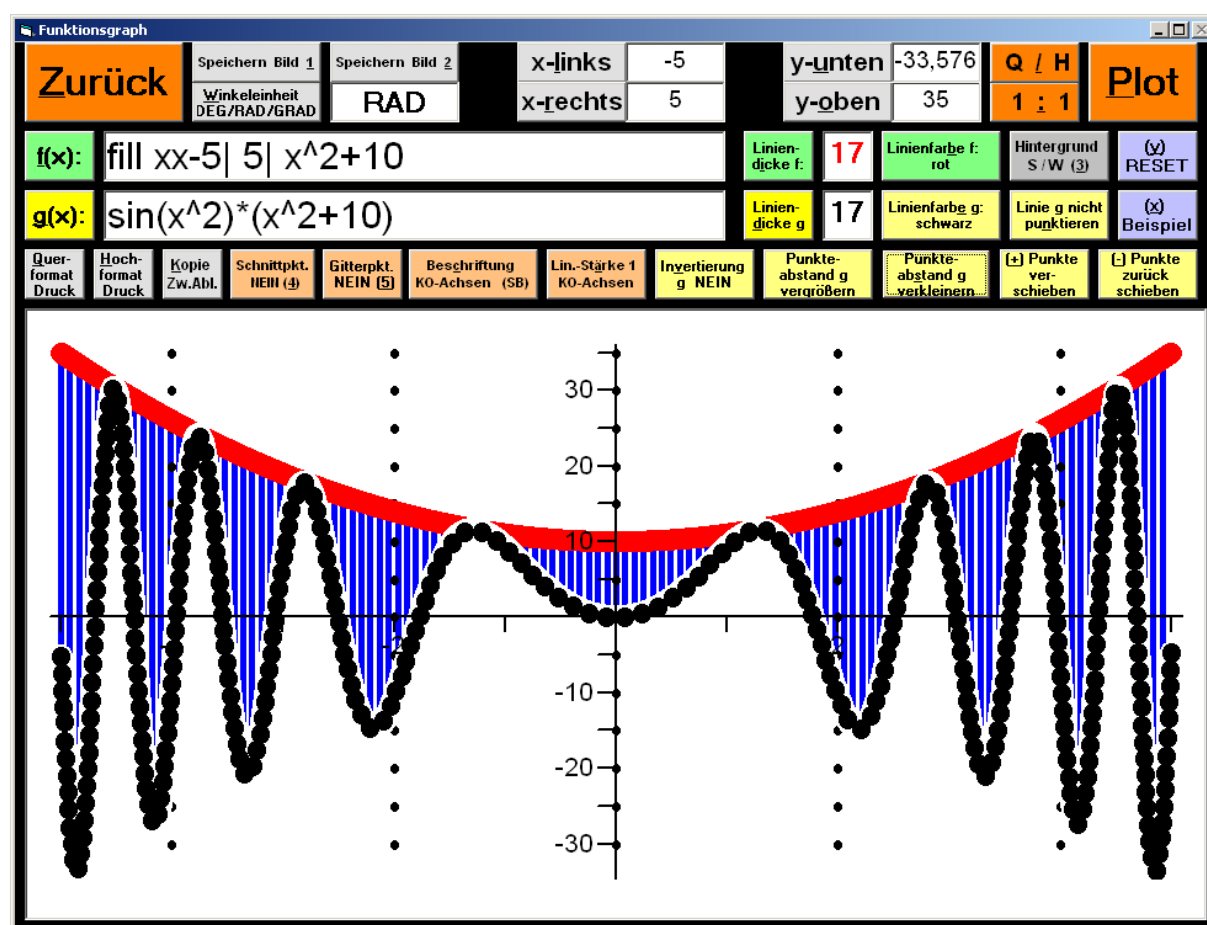


Bild 17

Aufgabe:

Gegeben

f: $f(x) = x^2 - 4$

In Worten:

"f(x) = x hoch 2 - 4"

und

g: $g(x) = \text{abs}(x^2 - 4)$

In Worten:

"g(x) = abs(x hoch 2 - 4)"

Die Graphen von f und g in dem Intervall I: $-5,5 < x < 5,5$ mit Beschriftung der Koordinatenachsen in Brailleschrift sollen gezeichnet werden.

In Worten:

"Intervall I: -5,5 kleiner x kleiner 5,5"

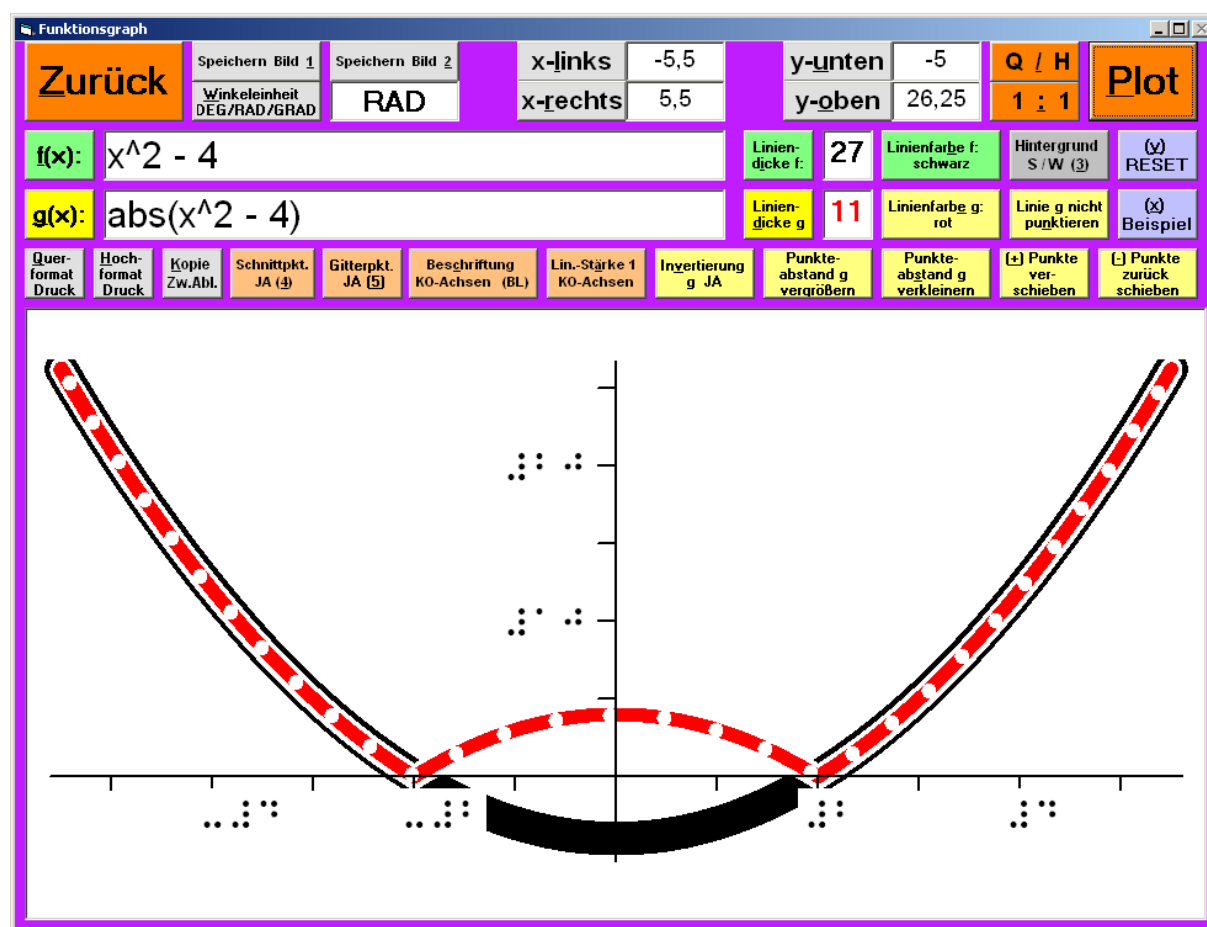


Bild 19

Aufgabe:

Die Normalverteilung $N(\mu = 4,5; \sigma = 1,5)$ soll gezeichnet und zusätzlich das Integral über die Normalverteilung $N(\mu = 4,5; \sigma = 1,5)$ in den Grenzen -3 bis 12 berechnen werden.

In Worten:

"N(Mü =4,5; Sigma =1,5)"

"Int fill xx-3| 12| DNorm(x|4,5|1,5)*10"

Beschriftung der Achsen in Braille-Schrift.

(Zur besseren Darstellung wird der Graph mit dem Faktor 10 gestreckt!)

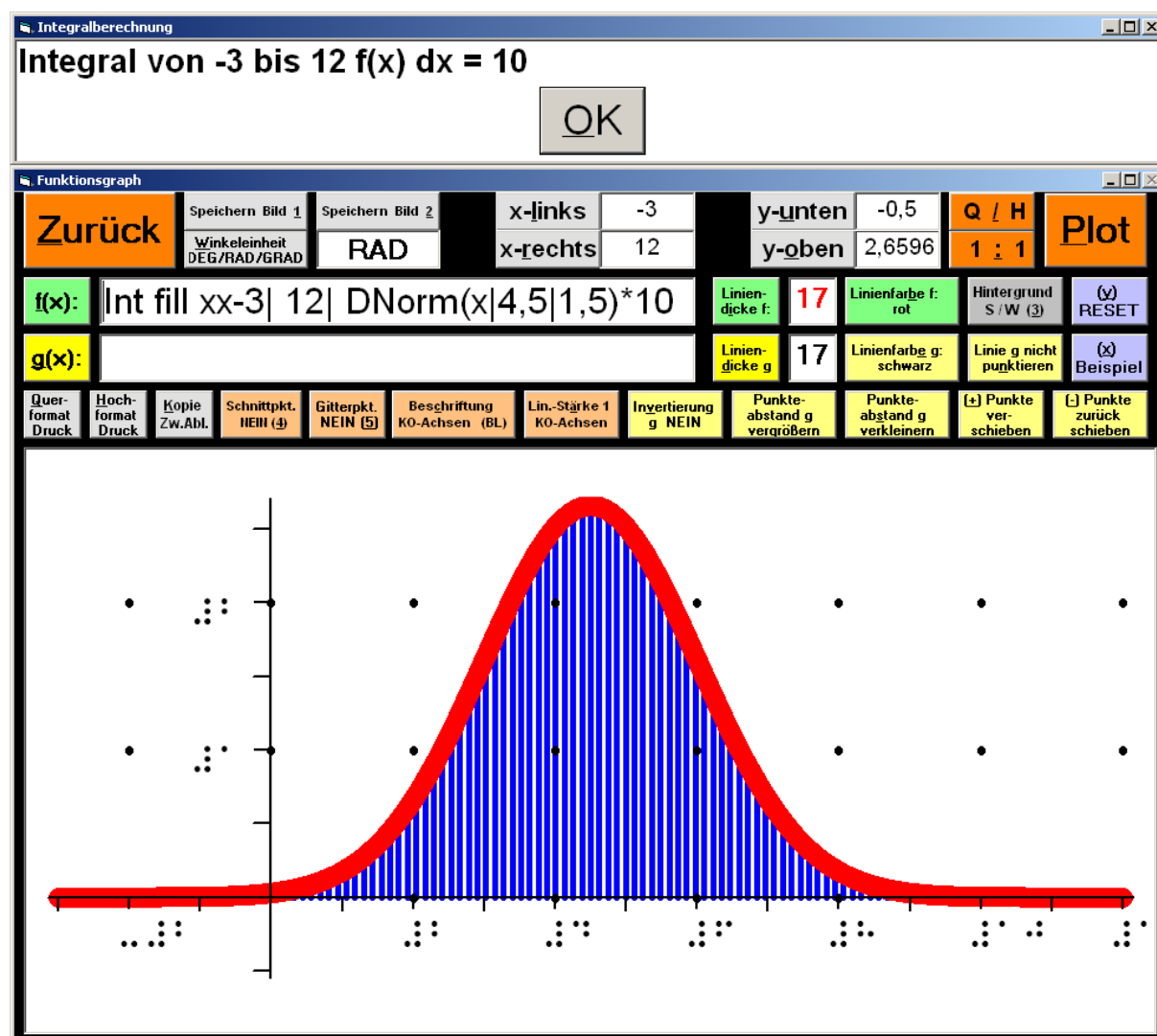


Bild 20**Aufgabe:**

Den Streckenzug $(-1 \mid -3)$ $(0 \mid -1)$ $(1 \mid 0)$ $(3 \mid 1)$ $(5 \mid 3)$
und die Gerade

$$y = 105/116 \cdot x - 168/116$$

zeichnen

Eingabe (Fenster **f**): $y = 105/116 \cdot x - 168/116$

Eingabe (Fenster **g**): $G(-1 \mid -3)$ $(0 \mid -1)$ $(1 \mid 0)$ $(3 \mid 1)$ $(5 \mid 3)$

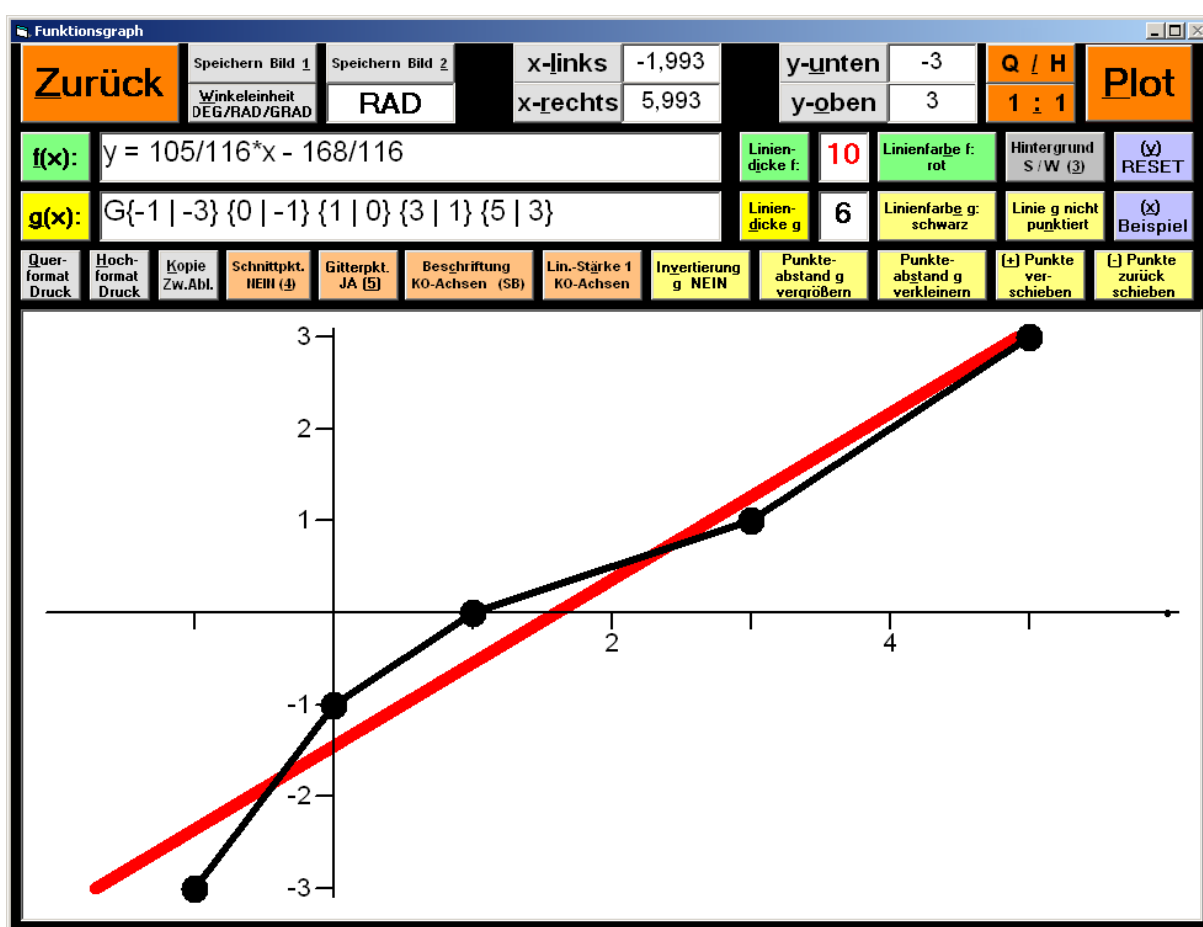


Bild 21

Aufgabe:

Die Koordinaten der Punkte: (1|5) (2|12) (3|16) (4|21)
(5|32) (6|39) (7|43) eingeben

Eingabe: A x1 y5 x2 y12 x3 y16 x4 y21 x5 y32 x6 y39 x7 y43

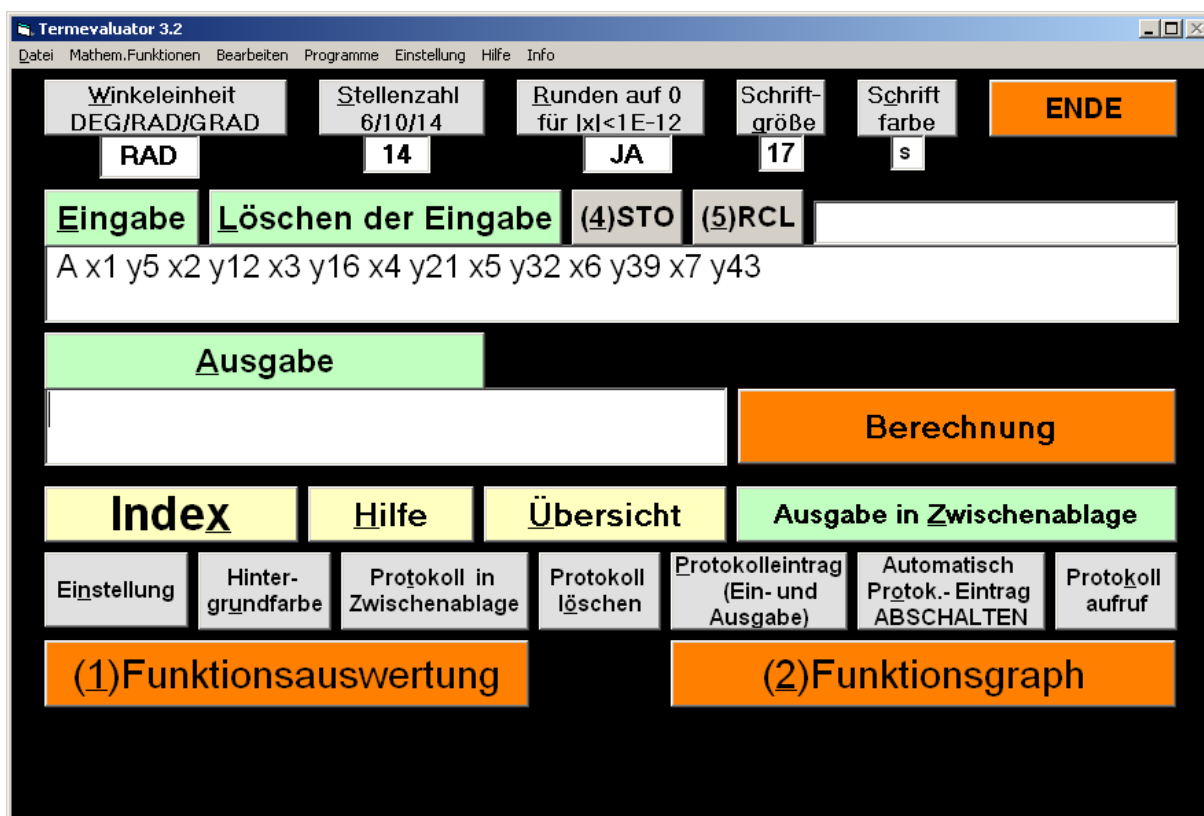


Bild 22

Aufgabe:

Die Punktmenge

"P(1|5)(2|12)(3|16)(4|21)(5|32)(6|39) (7|43)" ,

die "Ausgleichsgerade

$y = 6,57142857142857 \cdot x - 2,2857142857143$ "

und den Korrelationskoeffizienten

0,99229230596364"

ausgeben / zeichnen

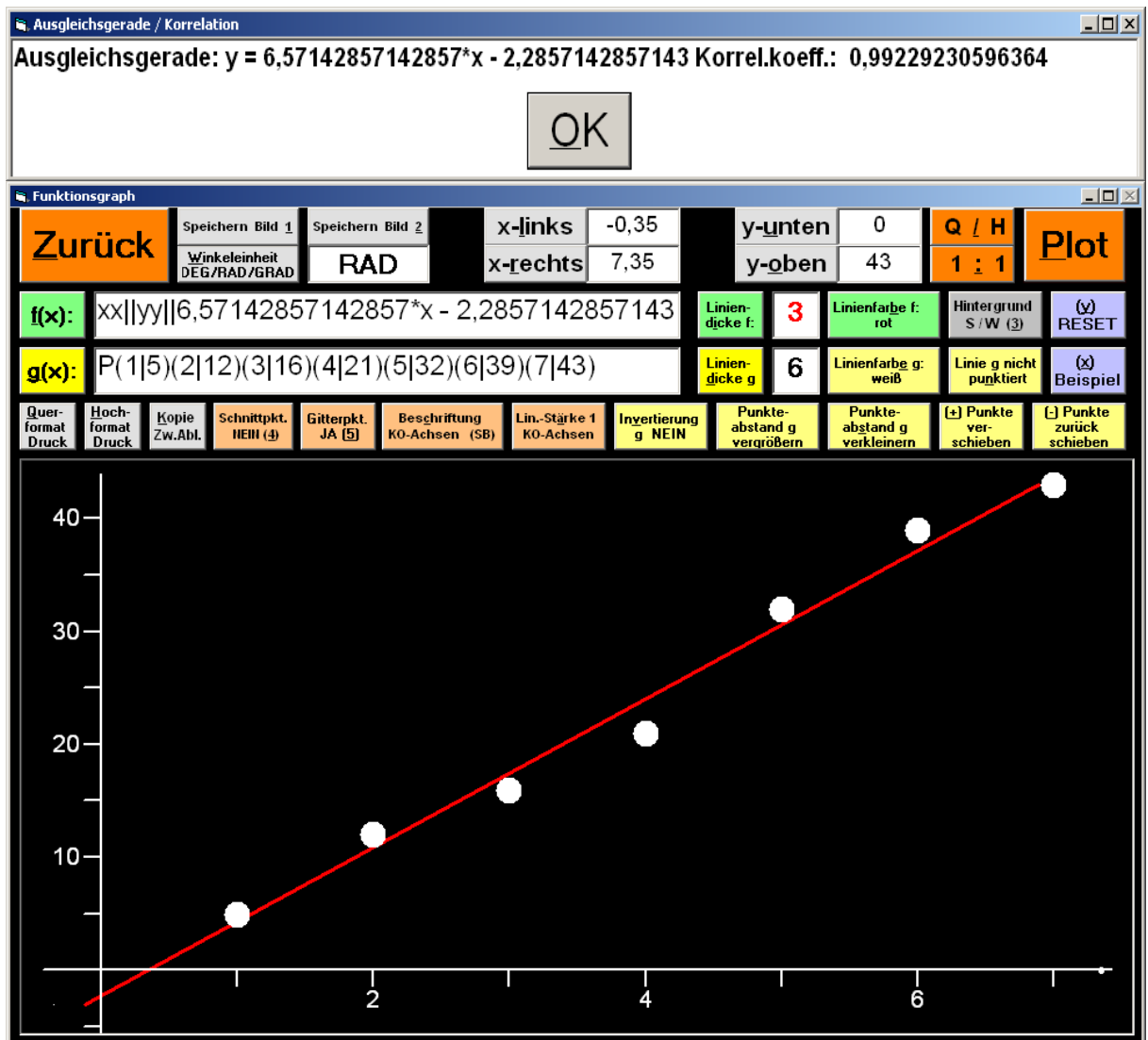


Bild 23

Aufgabe:

Mit der Iterationsfunktion:

$f(x) = \sin(x) + 0,5 \cdot x$ (Startwert $x_{(0)} = 1$)
das Folgenglied $x_{(100)}$ berechnen

Die Berechnung wird mit dem Glied $x_{(23)}$ abgebrochen, da sich dessen Wert nur noch geringfügig ändert.

Eingabe: „IT 1| 100| $\sin(x) + 0,5 \cdot x$ “

Ausgabe: Abbruch ! $x_{(22)}=1,89549426703398$
 $x_{(23)}=1,89549426703398$

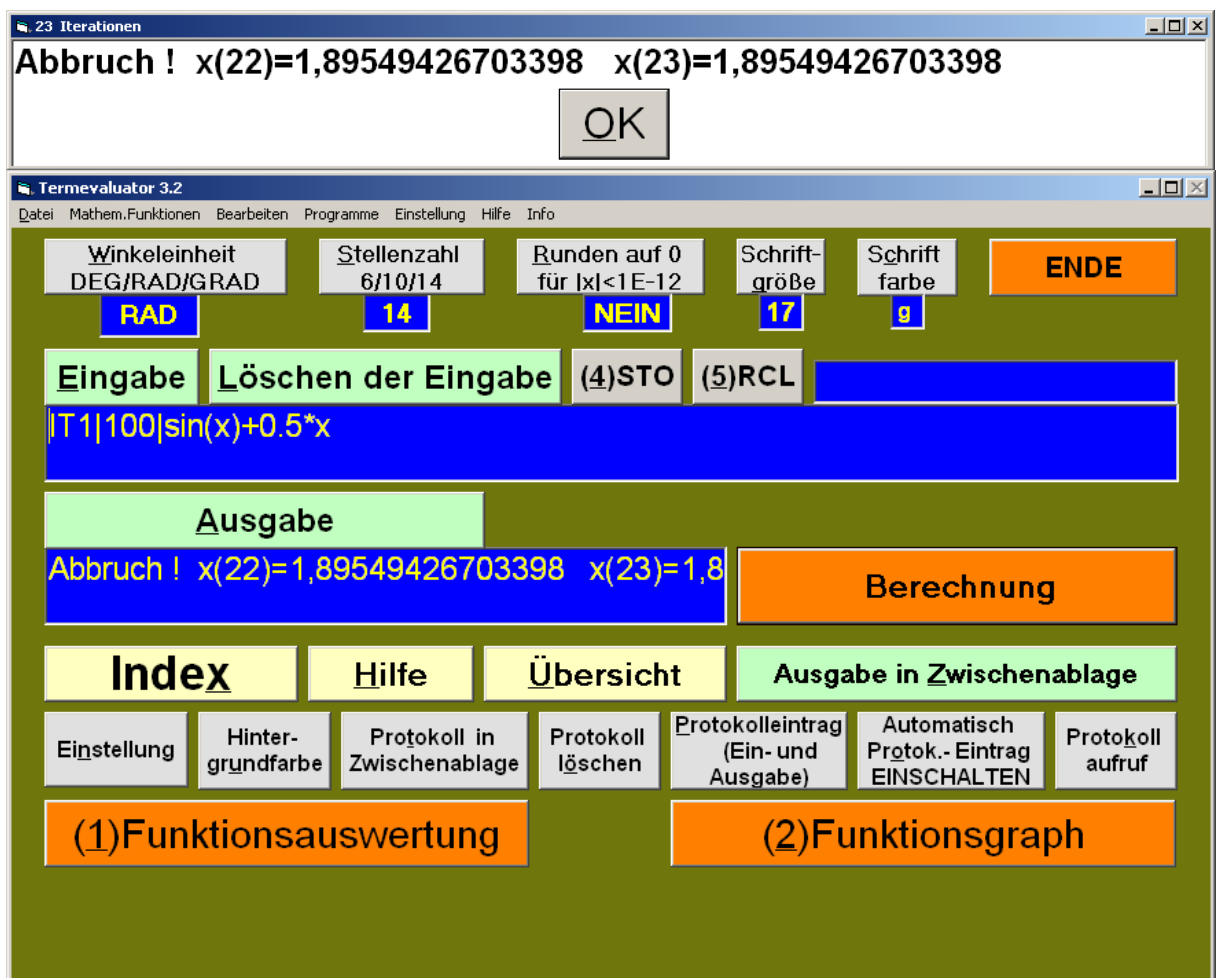


Bild 24**Aufgabe:**

Die Partialsumme $S_{(1000000)}$ zur unendlichen Reihe $\sum 1/n^2$ berechnen

Eingabe: "SUM 1| 1000000| 1/x^2"

Ausgabe: "1,64493306684877"

(Der Wert weicht nur geringfügig von $(\pi^2)/6$ ab !)

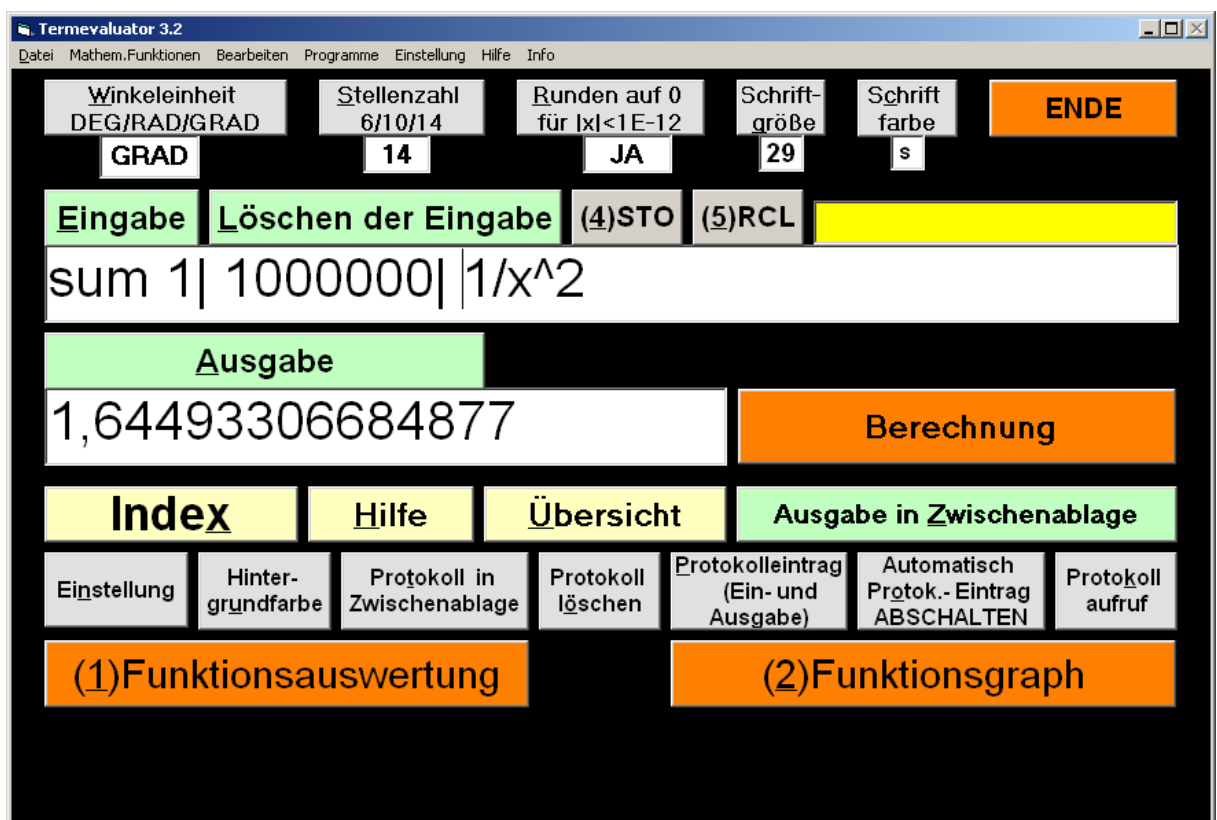


Bild 25**Aufgabe:**

Das Gleichungssystem $1,5x - 15y + 12z = 39$
 $-x - 14y + 12z = 38$
 $-5,5x + 31y - 24z = -79$

mit Hilfe des Matrixverfahrens lösen.

Eingabe:

GAUSS3|| 1,5| -15| 12| 39|| -1| -14| 12| 38|| -5,5| 31| -24| -79||

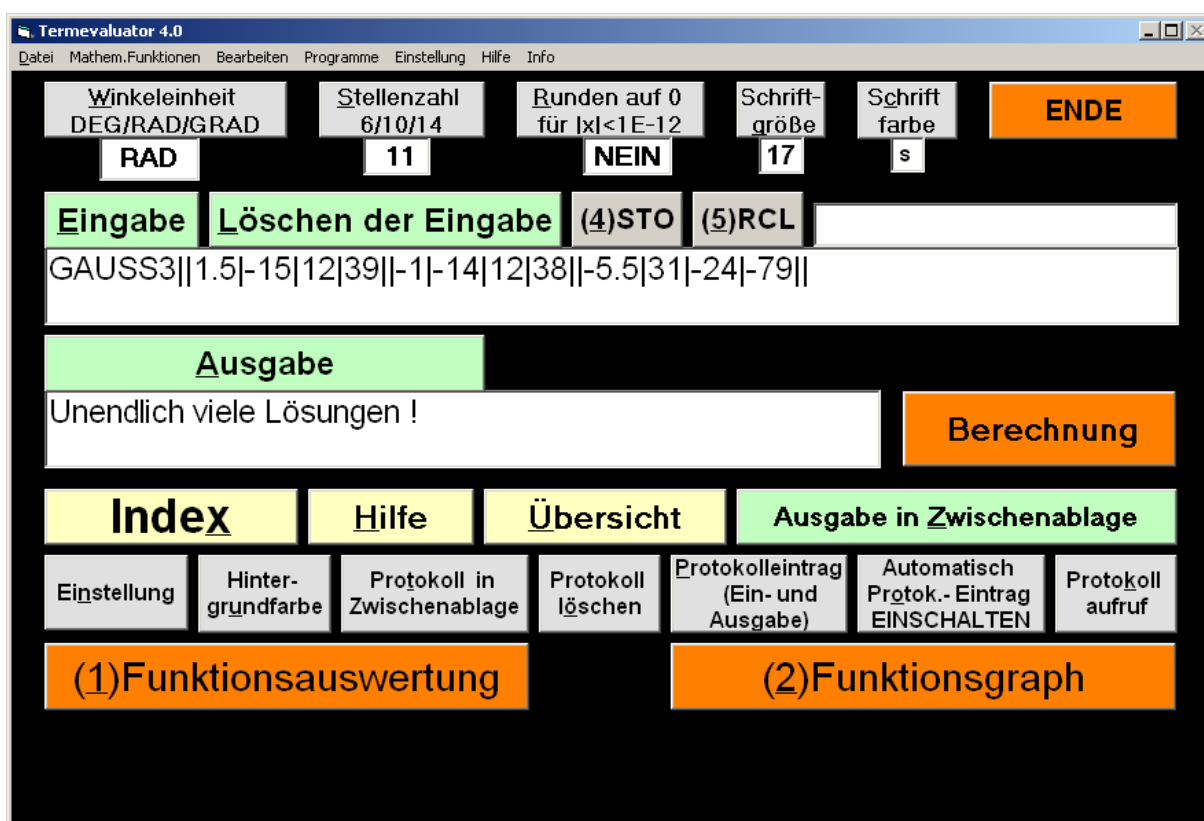


Bild 26**Lösung des Gleichungssystems (Bild 25):**

$$1,5x - 15y + 12z = 39$$

$$-x - 14y + 12z = 38$$

$$-5,5x + 31y - 24z = -79$$

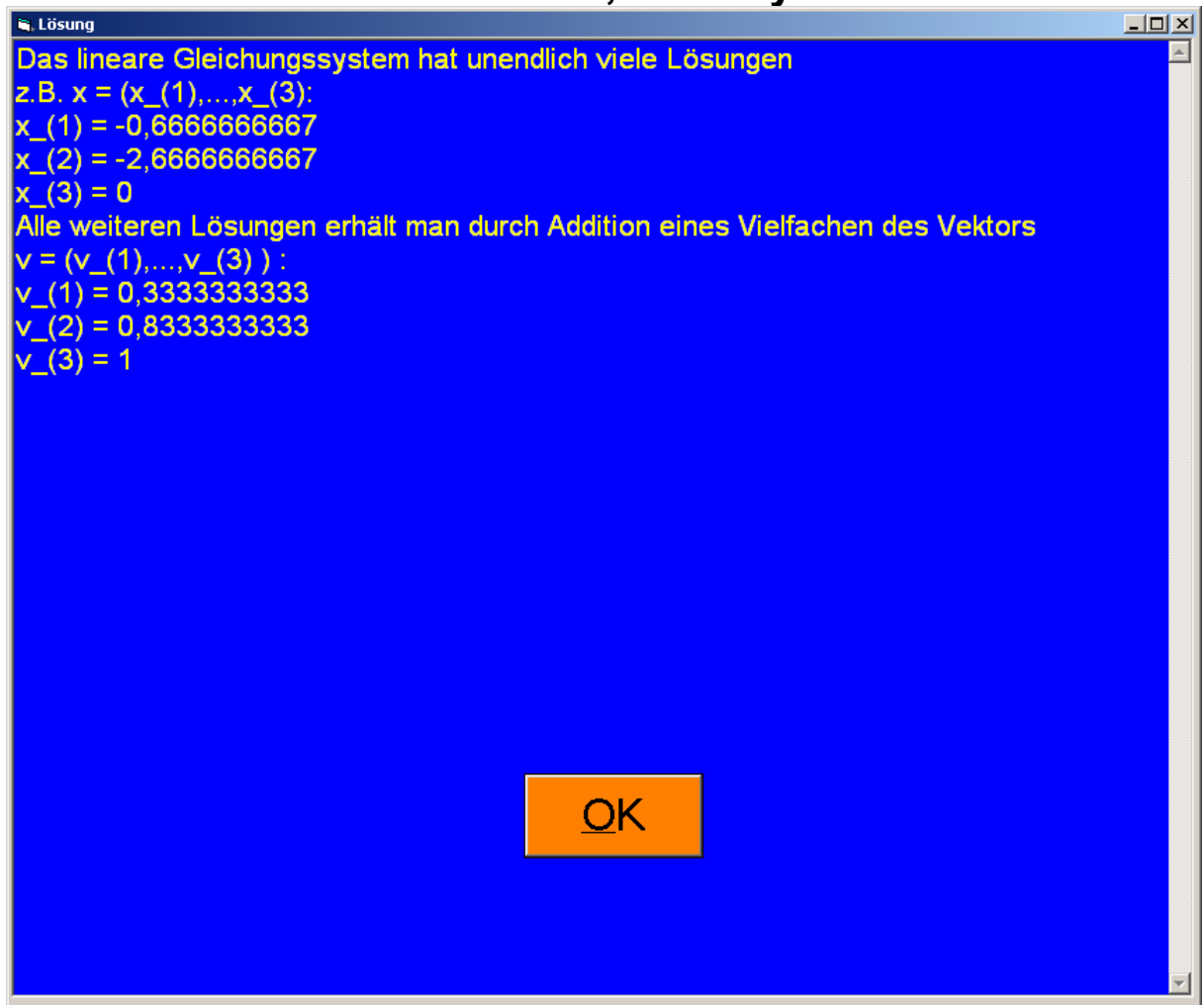


Bild 27

Graphische Darstellung (im Fenster "Funktionsgraph")
der Lösung zum AWP: $y_1 = t/y$; $y(-5) = 5,1$ (schwarz)
und den Asymptoten: $y = t$ und $y = -t$ (rot).

Eingabe: "DGL-5|5,1|4|t/y"

Ausgabe: "t=4 y=4,1243181255"

Lösungsfunktion: $y(t) = \sqrt{t^2 + 1,01}$

ye = y(4): $\sqrt{17,01} = 4,124318125$

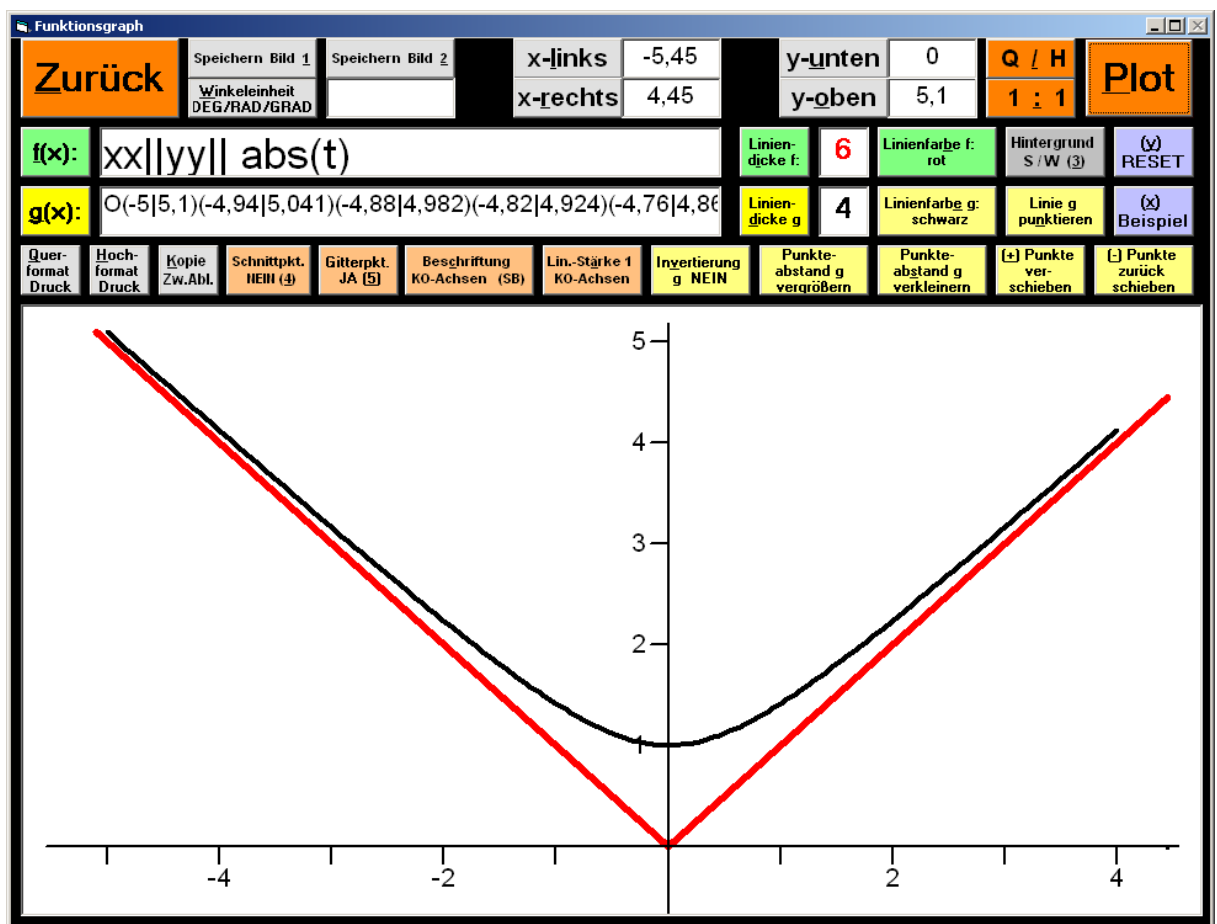


Bild 28

Graphische Darstellung von 3 Lösungen der DGL:

$$y_s = 10 \cdot \cos(t^2);$$

$$t_a=0; \quad y_a=0; \quad t_e=5.$$

Eingabe: "DG 1 | 0 | 0 | 5 | $\cos(t^2)$ "

Ausgabe: "t=5 y=6,114667664"

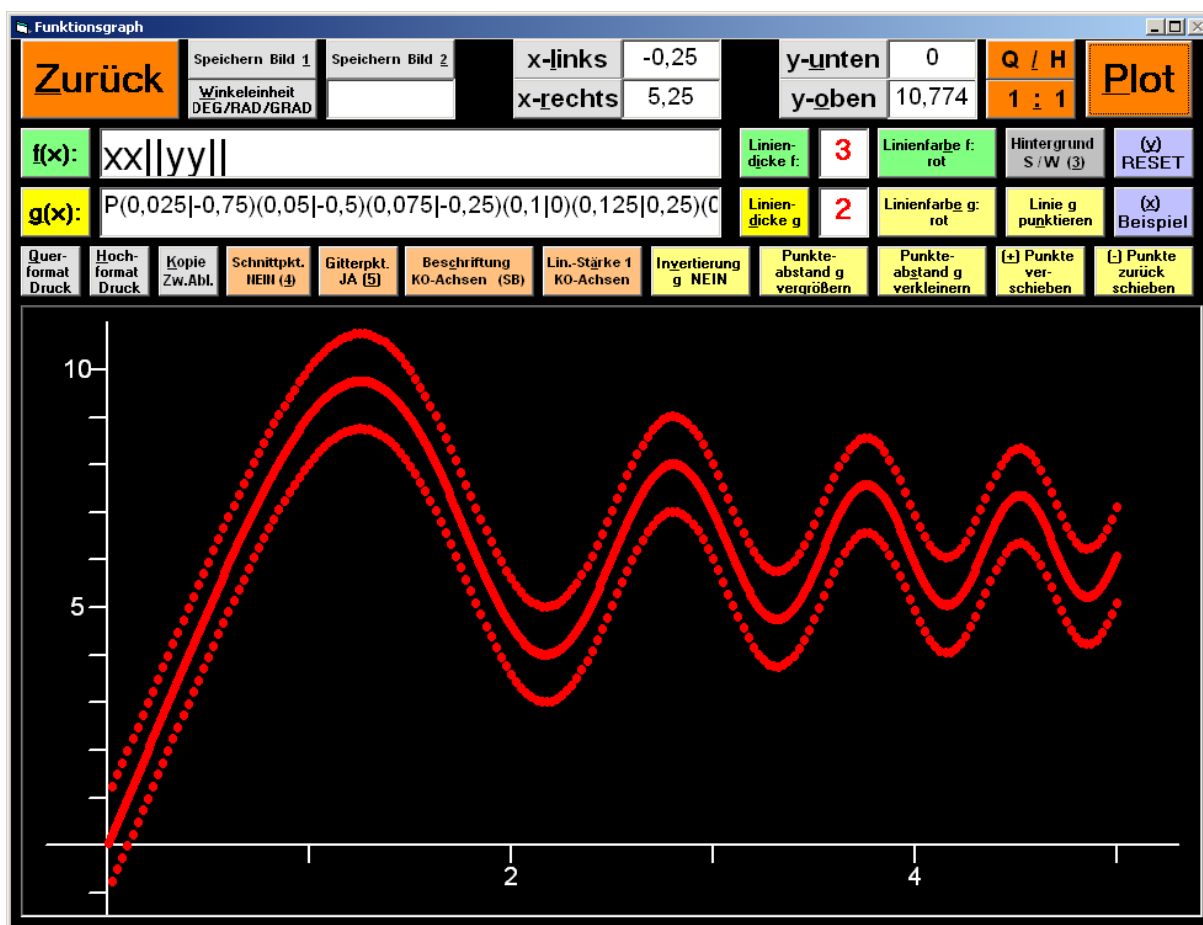


Bild 29

Graphische Darstellung der Lösungskomponenten $x(t)$ und $y(t)$ des Differenzialgleichungssystems:

$$x_s = x + y$$

$$y_s = 4x - 2y$$

$$t_a = 0; \quad x_a = 0; \quad y_a = 5; \quad t_e = 1.$$

Eingabe: "DGSXYT 0 | 0 | 5 | 1 | x + y | 4*x - 2*y"

Ausgabe: "t=1 x=7,339269 y=7,588204"

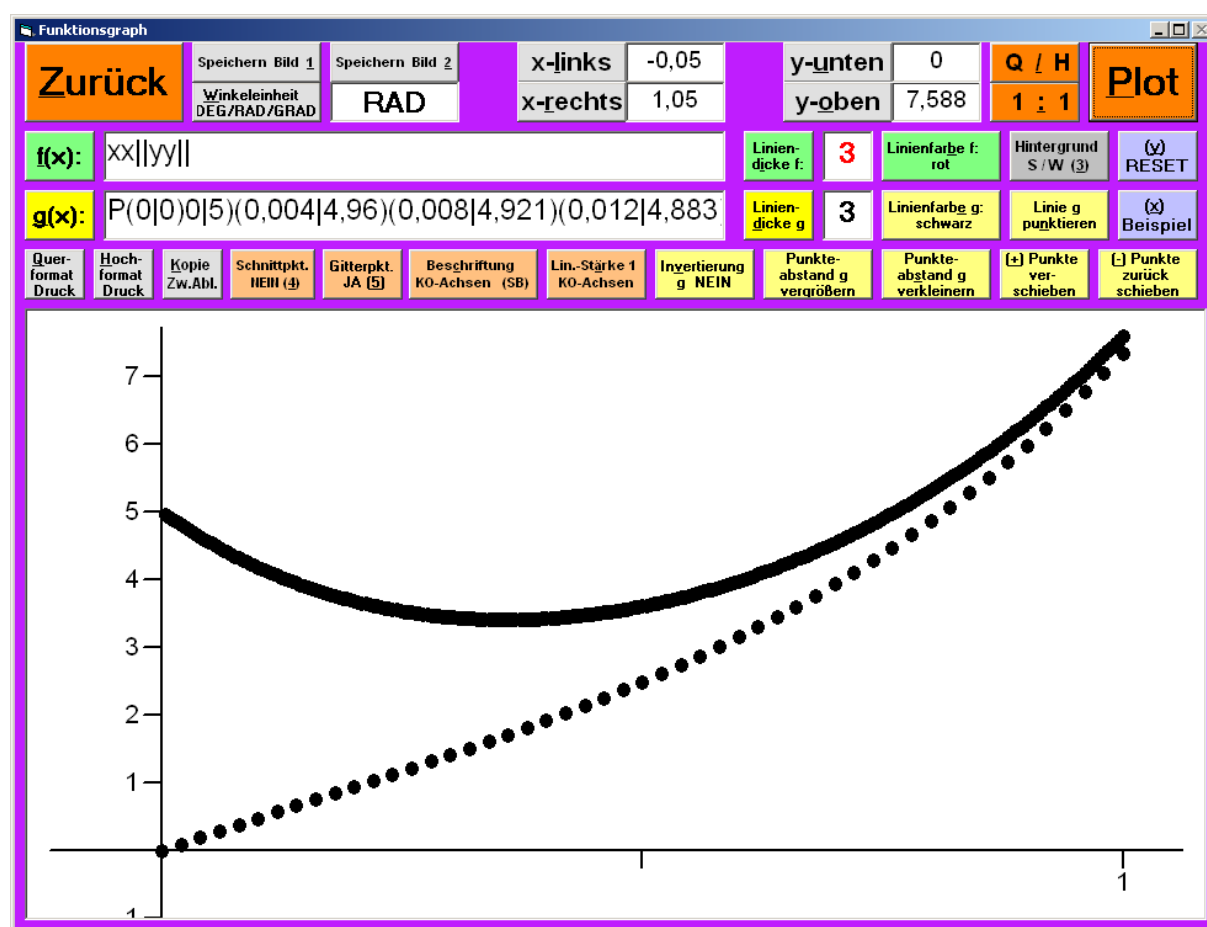


Bild 30

Flugbahn eines Projektils mit der Startposition (0 m| 0 m),
der Startgeschwindigkeit von 40 m/s und dem anfänglichen
Steigungswinkel von 45°

$$x_s = \cos(45) \cdot 40$$

$$y_s = \sin(45) \cdot 40 - 9,81 \cdot t$$

$$t_a = 0; x_a = 0; y_a = 0; t_e = 5$$

Eingabe: "DGSX-Y|0|0|0|5|cos(45)*40|sin(45)*40-9,81*t"

Ausgabe: "t=4 x=113,137085 y=34,657085"



Bild 31**"Lotka-Volterra-Modell"**

$$x' = 3.8 \cdot x - 0.3 \cdot x \cdot y$$

$$y' = 3.4 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y$$

$$t_a = 0; x_a = 2; y_a = 1; t_e = 12$$

Darstellung der Lösungskomponenten $x(t)$ und $y(t)$ in einem XY-Diagramm

Eingabe: **"DGSX-Y0|2|1|12|3.8*x - 0.3*x*y|3.4*x*y - 4*y"**

Ausgabe: **"t=12 x=0,210477 y=2,411683"**

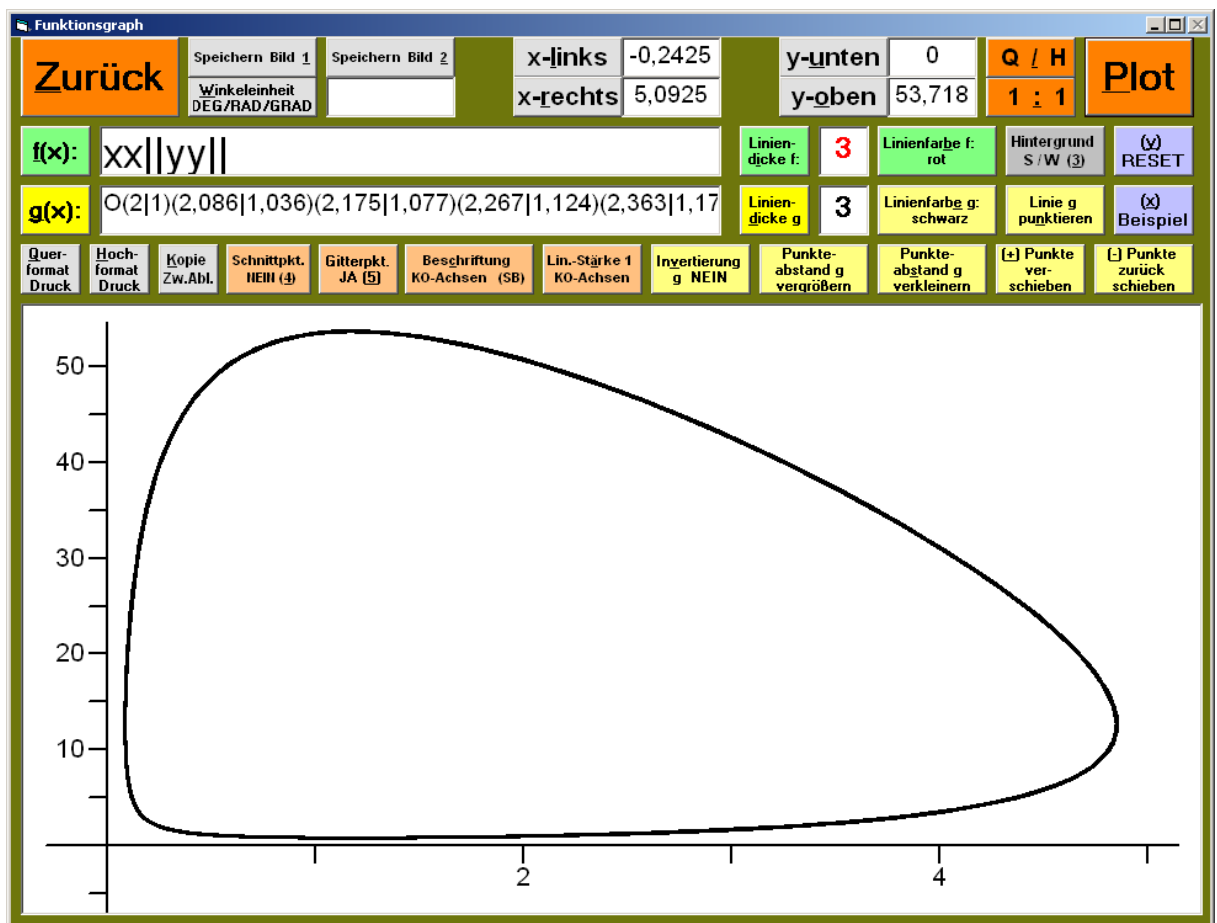


Bild 32**"Lotka-Volterra-Modell"**

$$x_s = 3.8 \cdot x - 0.3 \cdot x \cdot y$$

$$y_s = 3.4 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y$$

$$t_a = 0; x_a = 2; y_a = 1; t_e = 12$$

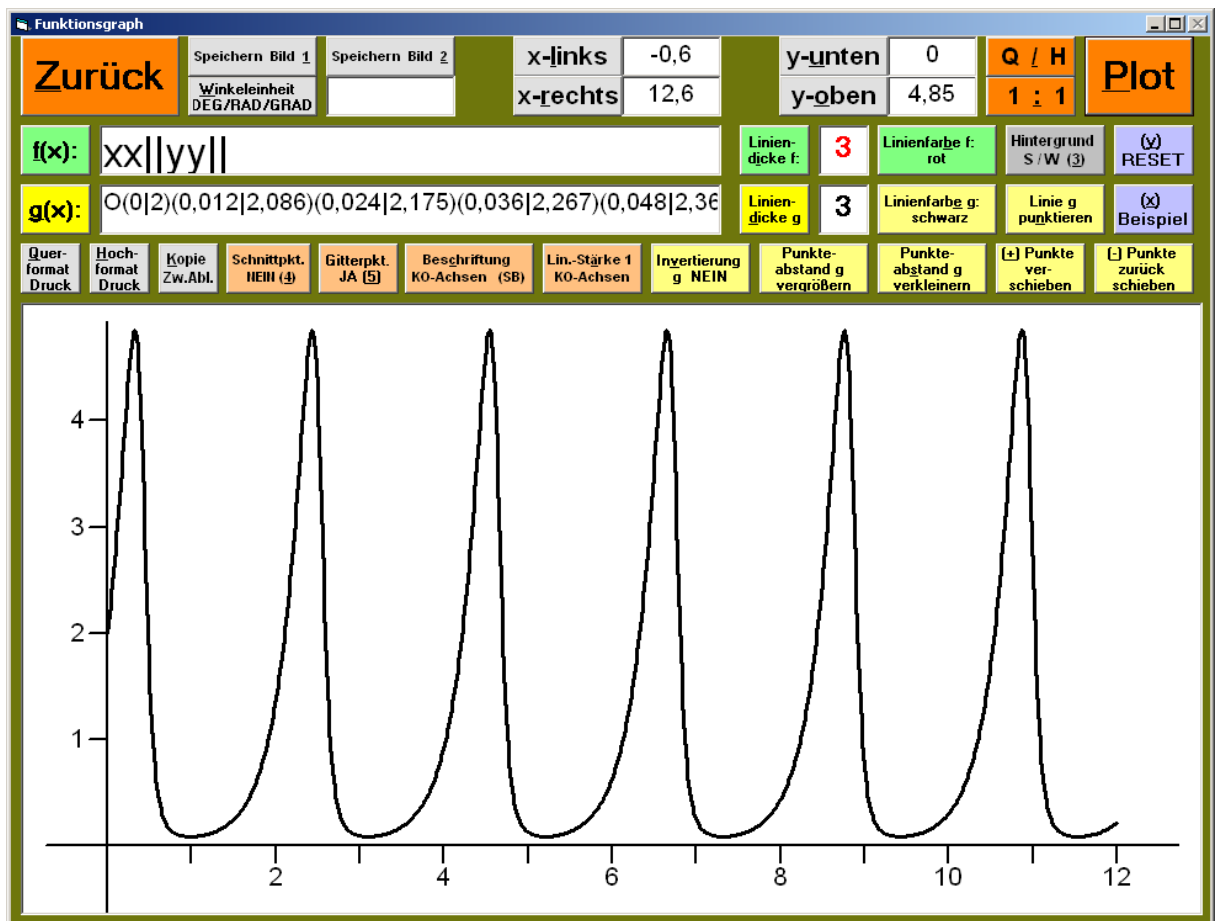
Darstellung der Lösungskomponente $x(t)$ in einem XT-Diagramm:Eingabe: **"DGSXT0|2|1|12|3.8*x - 0.3*x*y|3.4*x*y - 4*y"**Ausgabe: **"t=12 x=0,210477 y=2,411683"**

Bild 33

"Mathematisches Pendel" - mit kleiner Auslenkung -

$$y_{ss} = -12 \cdot \sin(y)$$

$t_a=0$; $y_a=0$; $y_s=3$; $t_e=10$ (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: "DGGYYS 0 | 0 | 3 | 10 | - 12*sin(y)"

Ausgabefenster: "te=10 y(te)=0,893176 ys(te)=0,215848"

Lösungsfunktion(genähert): $y_n(t) = 3/\sqrt{12} \cdot \sin(\sqrt{12} \cdot x)$

Graph von $y(t)$ (Auslenkung) durchgezogen schwarz

Graph von $y_s(t)$ (Winkelgeschwindigkeit) gepunktet schwarz

Graph der Näherung $y_n(t)$ durchgezogen rot

Die Funktion $y_n(t)$ ist nur während der 1. Periode (ungefähr 2 s lang) eine brauchbare Näherung für die Funktion der Auslenkung $y(t)$.

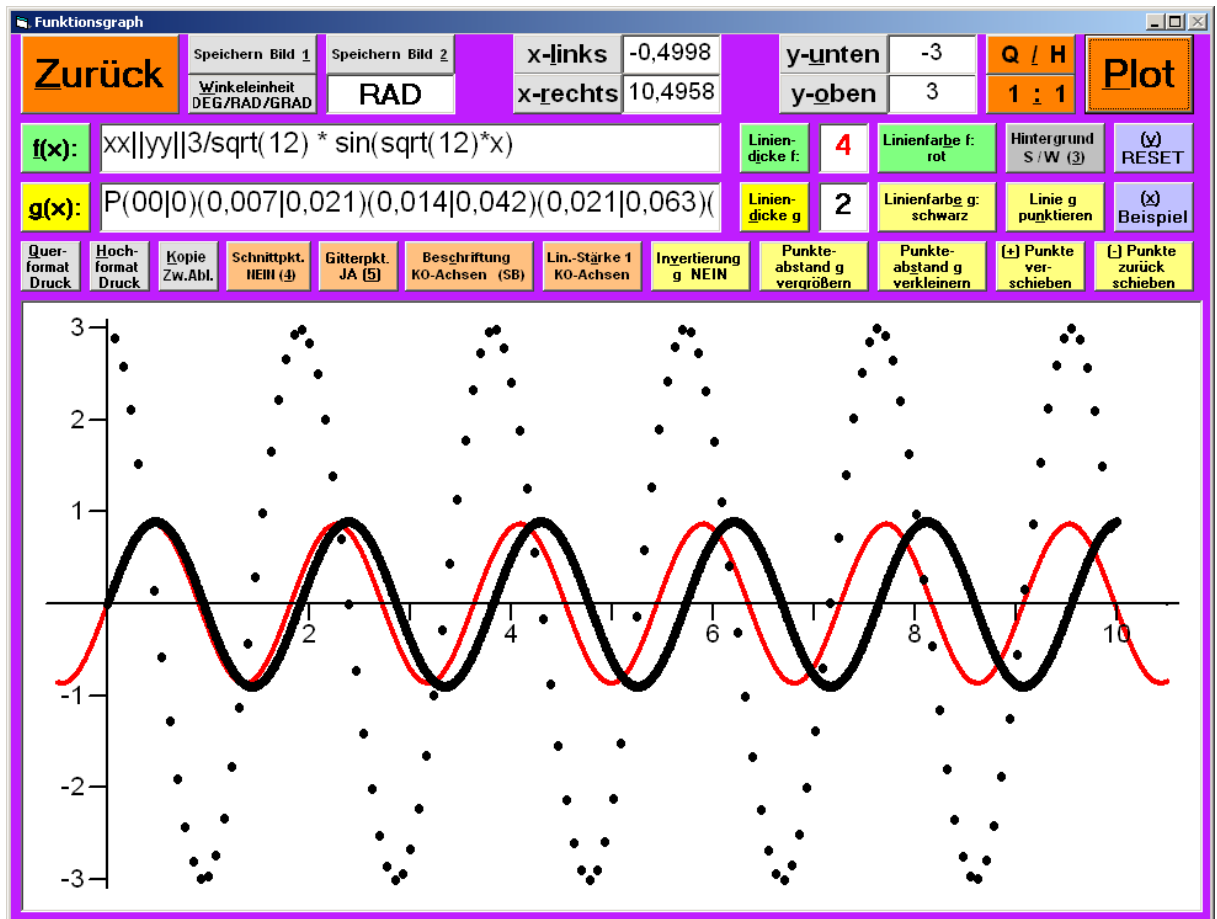


Bild 34

"Mathematisches Pendel" - mit großer Auslenkung

$$y_{ss} = -12 \cdot \sin(y)$$

ta=0; ya=0; ys=6,92; te=10 (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: "DGGy-ys 0 | 0 | 6,92 | 10 | - 12*sin(y)"

Ausgabefenster: "te=10 y(te)=-1,216587 ys(te)=5,675453"

Die Funktionen $y(t)$ (Graph durchgezogen) und $ys(t)$ (Graph gepunktet) sind periodisch (Periodendauer ungefähr 5 s), können aber nicht mehr durch eine Sinusfunktion angenähert werden.

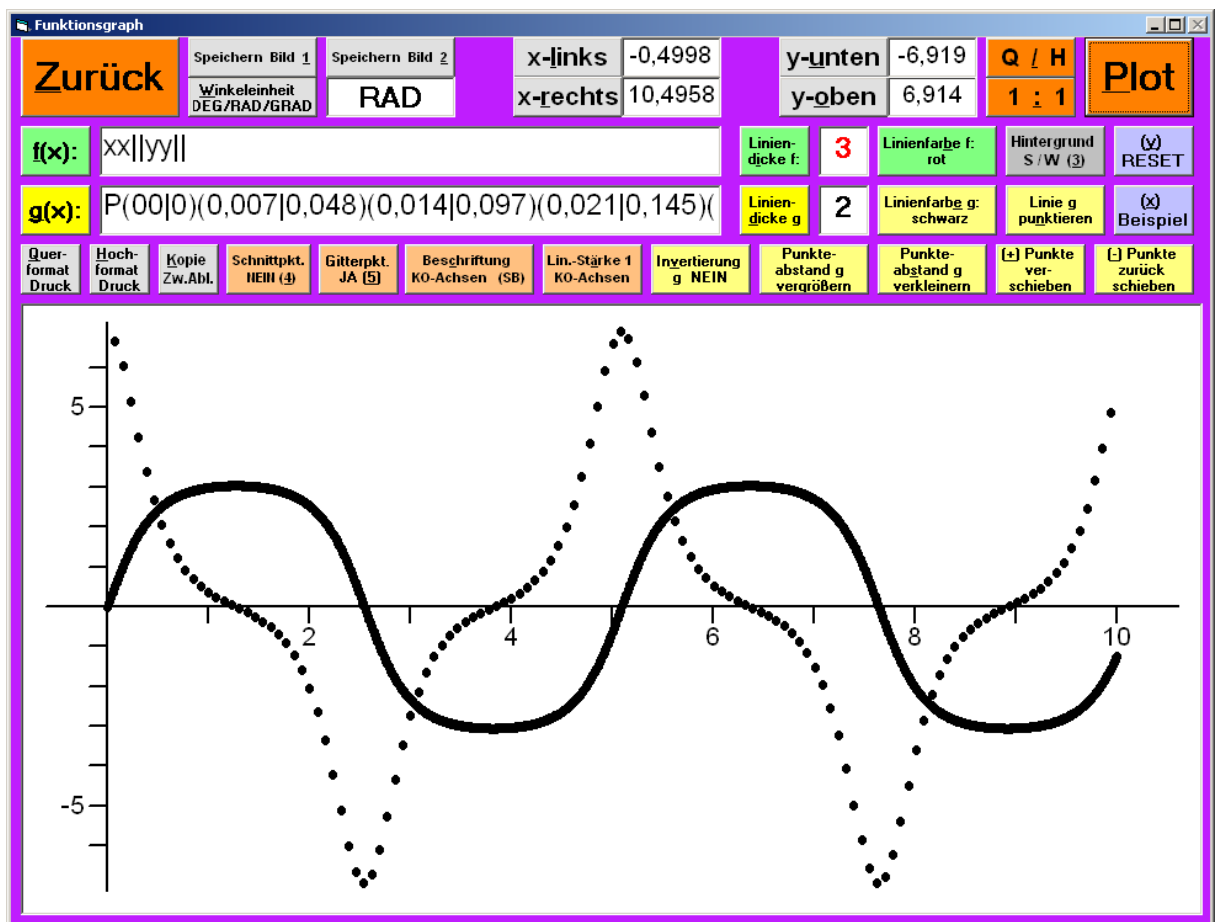


Bild 35

"Mathematisches Pendel" - mit "Überschlag" -

$y_{ss} = -12 \cdot \sin(y)$

ta=0; ya=0; ys=6,95; te=10 (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster: "DGGy-ys 0 | 0 | 6,95 | 10 | - 12*sin(y)"

Ausgabefenster: "te=10 y(te)=28,174136 ys(te)=0,650287 "

Die Funktion $y(t)$ (Graph durchgezogen) ist streng monoton wachsend; die Funktion $ys(t)$ (Graph gepunktet) ist positiv und periodisch (Periodendauer ungefähr 2,3 s). Das Pendel dreht sich also ununterbrochen im gleichen Sinn, aber mit unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeit um die Achse.

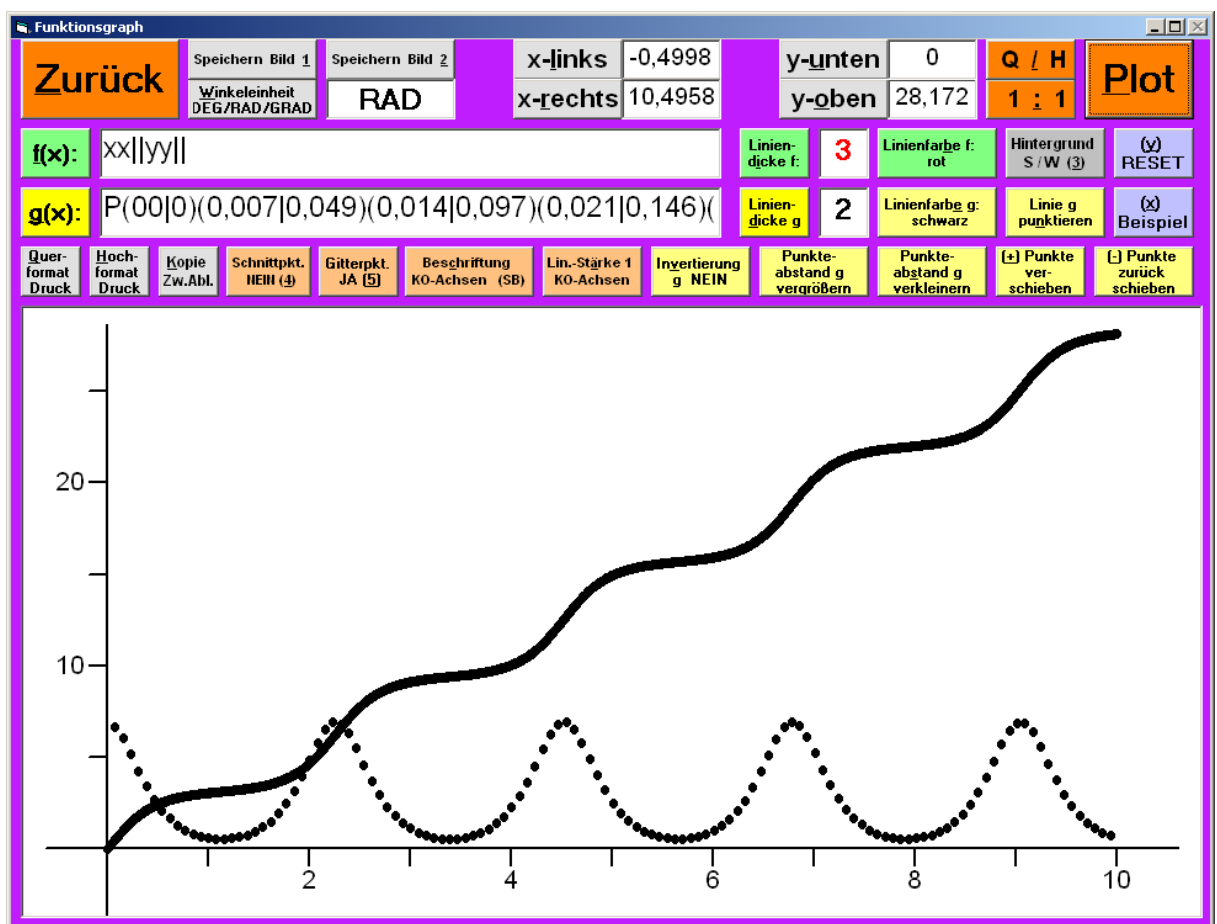


Bild 36

"Mathematisches Pendel" mit "Dämpfung"; Darstellung im Phasendiagramm (y(t) - ys(t))

Der Pendelkörper wird aus der Ruhelage mit der Winkelgeschwindigkeit $y_s(0) = 6,95 \text{ rad/s}$ ausgelenkt. Für die Dämpfung des Pendels ergänzt man die DGL um einen zu y_s proportionalen Term, in unserem Beispiel: $"-0.1*y_s"$.

$$y_{ss} = -12*\sin(y) - 0,1*y_s$$

An welcher Stelle ($y(te)$) befindet sich das Pendel nach $te=50 \text{ s}$?
Welche Winkelgeschwindigkeit ($y_s(te)$) hat es zu diesem Zeitpunkt ?

$$y_{ss} = -12*\sin(y)$$

$ta=0; ya=0; ys=6,95; te=30$ (Winkeleinheit: "RAD" !)

Eingabefenster:

"DGG y-ys 0 | 0 | 6,95 | 50 | - 12*sin(y) - 0,1*y_s"

Ausgabefenster: "te=50 y(te)=0,087828 ys(te)=-0,570158"

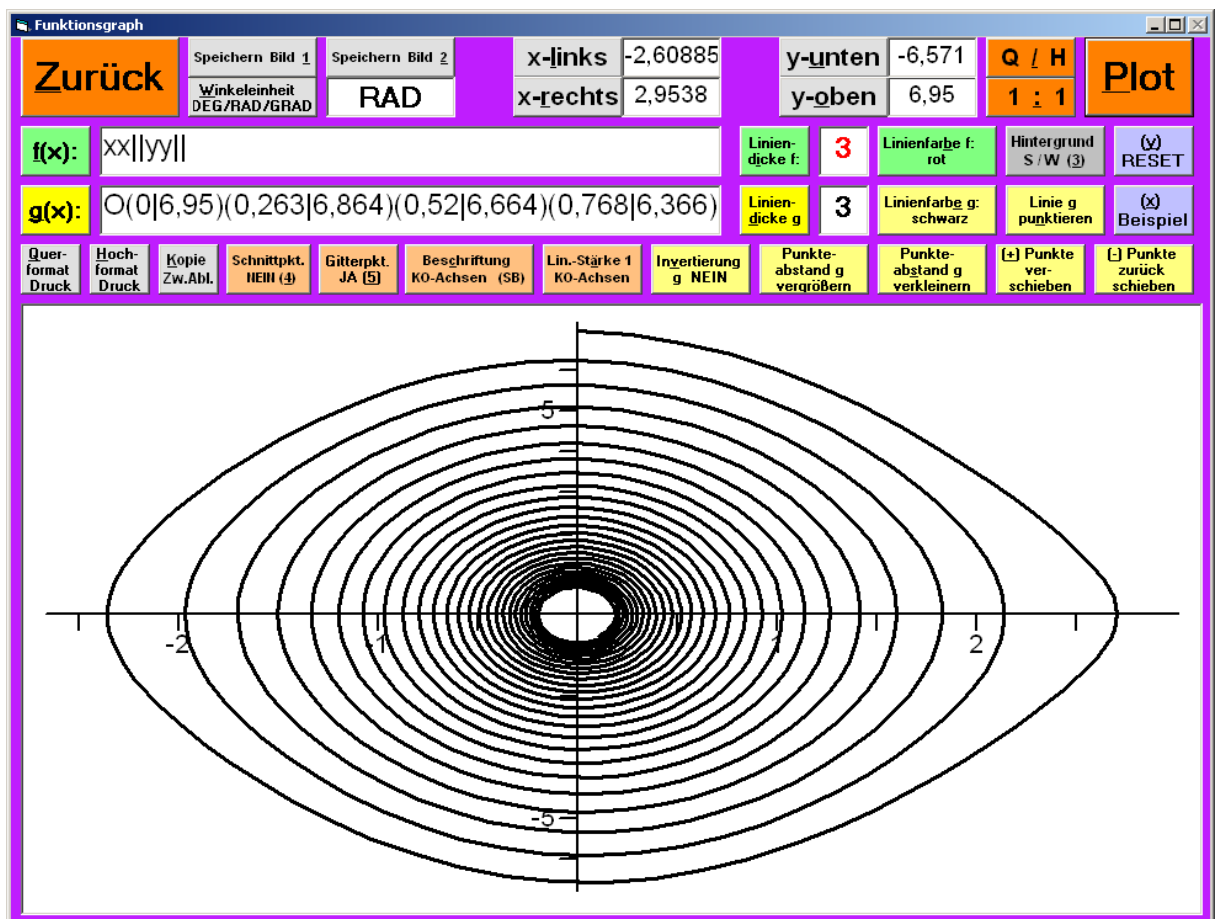


Bild 37

Lineare Optimierung

Veranschaulichung der Lösungsmenge des Systems aus den folgenden 3 Ungleichungen:

1. $-1 \cdot x + 1 \cdot y \leq 0$
2. $1 \cdot y \leq 10$
3. $-0,6 \cdot x + 1 \cdot y \geq 0,4$

durch ein Dreieck mit den Eckpunkten A(1 / 1), B(16 / 10) und C(10 / 10)

Zusätzlich wird die Gerade:

$$-1 \cdot x + 2 \cdot y = 8$$

rotgerändert dargestellt. Sie schneidet die Seite AC in P(8 / 8) und die Seite BC in Q(12 / 10).

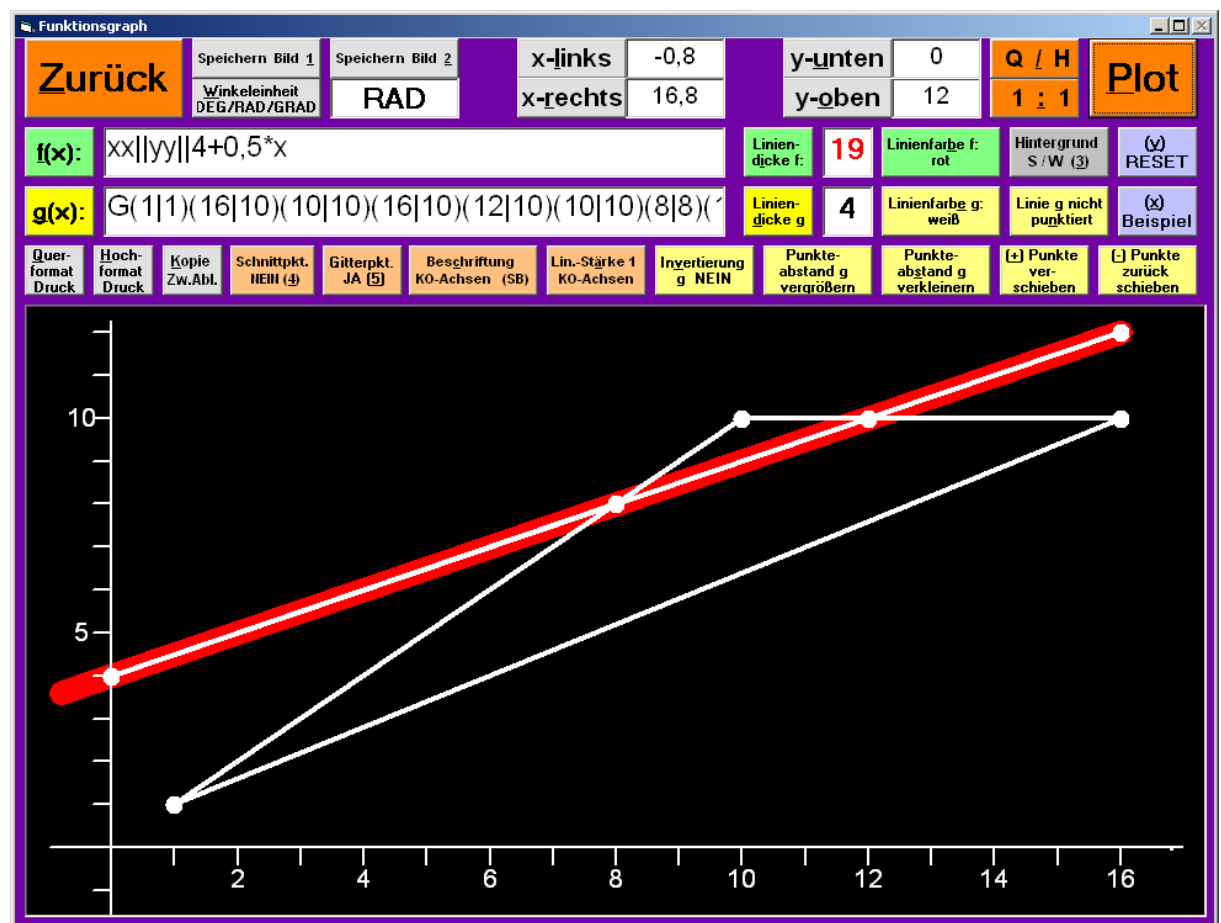


Bild 38**Lineare Optimierung**

Das Maximum der **Zielfunktion Z** mit der Gleichung: $z = 3x - 2y$.
ist über der Menge, die durch die Ungleichungen:

1. $-1 \cdot x + 1 \cdot y \leq 0$
2. $0 \cdot x + 1 \cdot y \leq 10$
3. $0,6 \cdot x - 1 \cdot y \leq -0,4$

beschrieben wird, zu ermitteln.

Eingabe:

"LOP AnzVAR 2|AnzNB 3|MAXMIN Z=||3|-2||KoeffNB||-1|1|0||0|1|10||0,6|-1|-0,4||"

Ausgabe:

"Z_max = 28 | X_max = (16 | 10)"

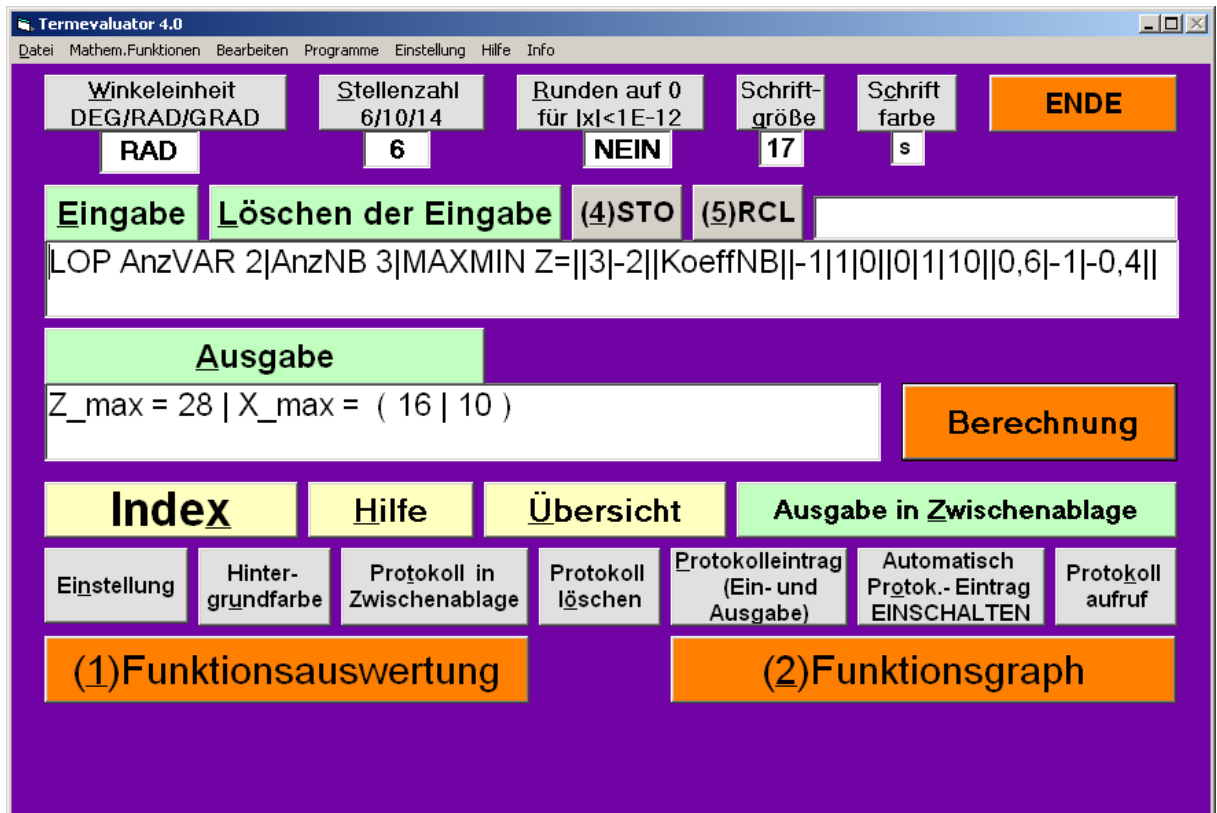
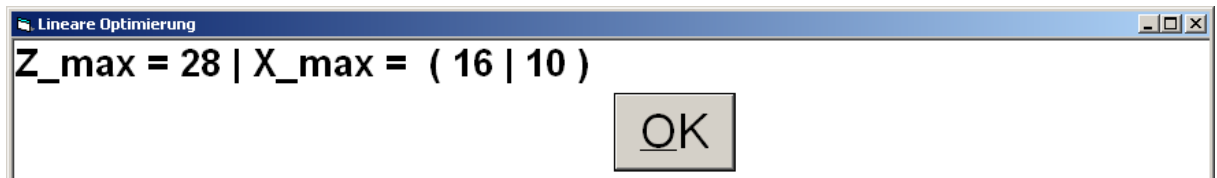


Bild 39

**Graph (Hoch- u. Tiefpunkte)
der Funktion $f : f(x) = x + \text{abs}(4 \cdot \cos(x^2))$
im Intervall $[-5 \dots 5]$:**

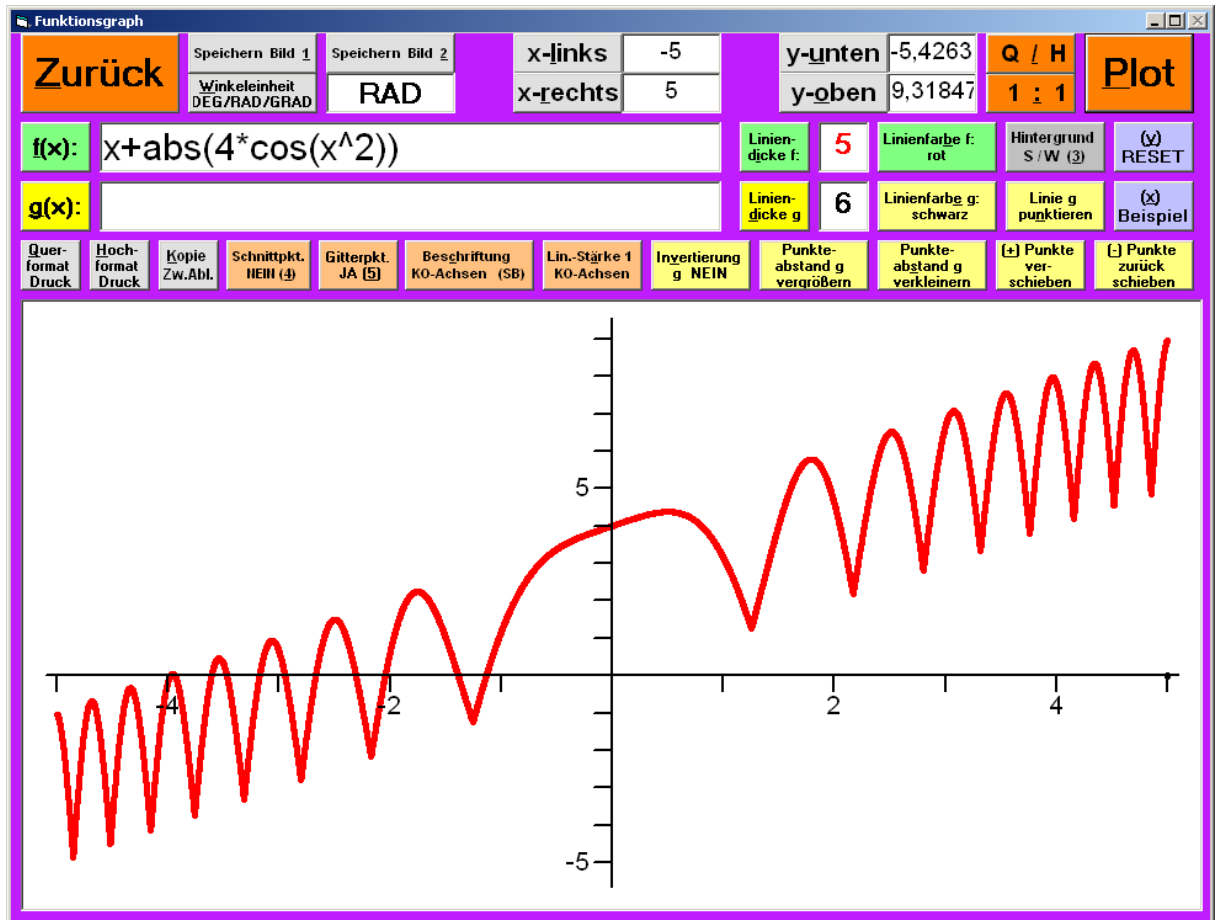


Bild 40

Eingabe des Funktionsterms " $x + \text{abs}(4 \cdot \cos(x^2))$ " zur Bestimmung der Hoch- und Tiefpunkte im Intervall $[-5 \dots 5]$:

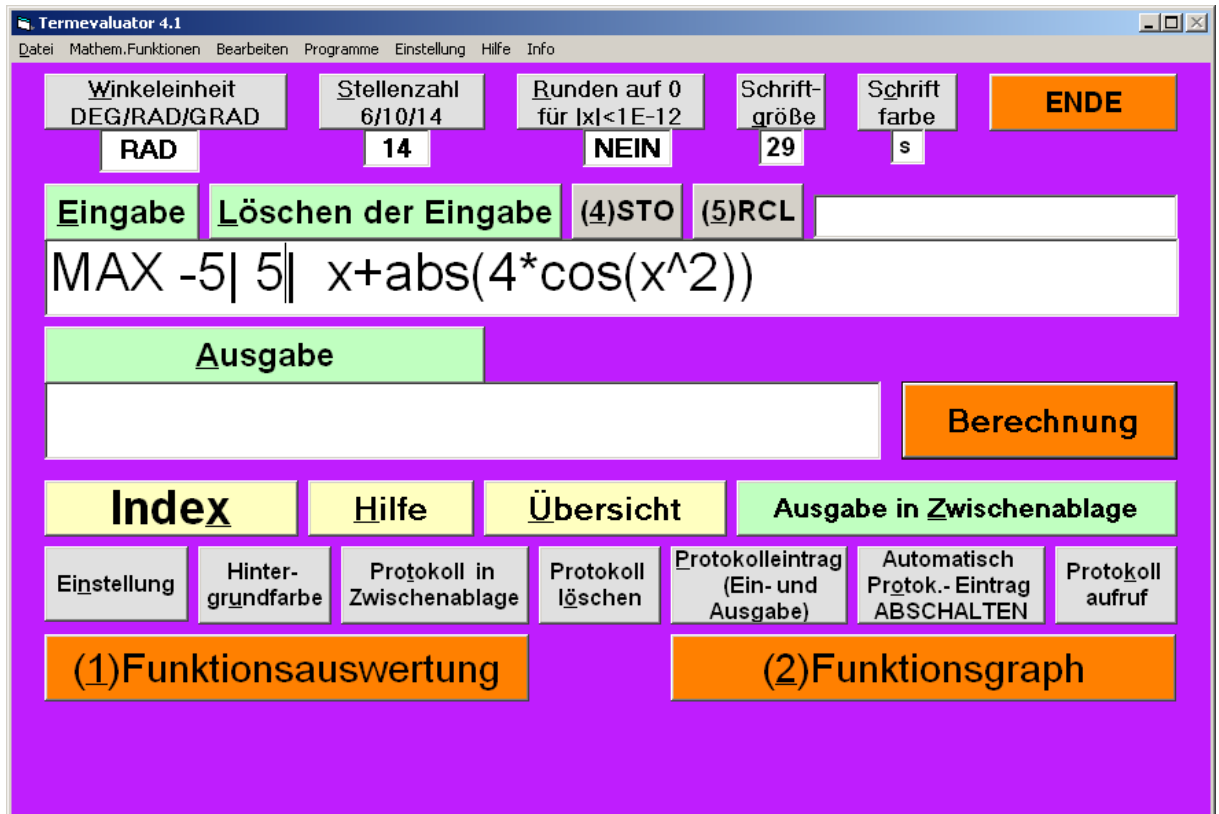


Bild 41

Zusammenstellung aller Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion $f : f(x) = x + \text{abs}(4 \cdot \cos(x^2))$ im Intervall $[-5...5]$:

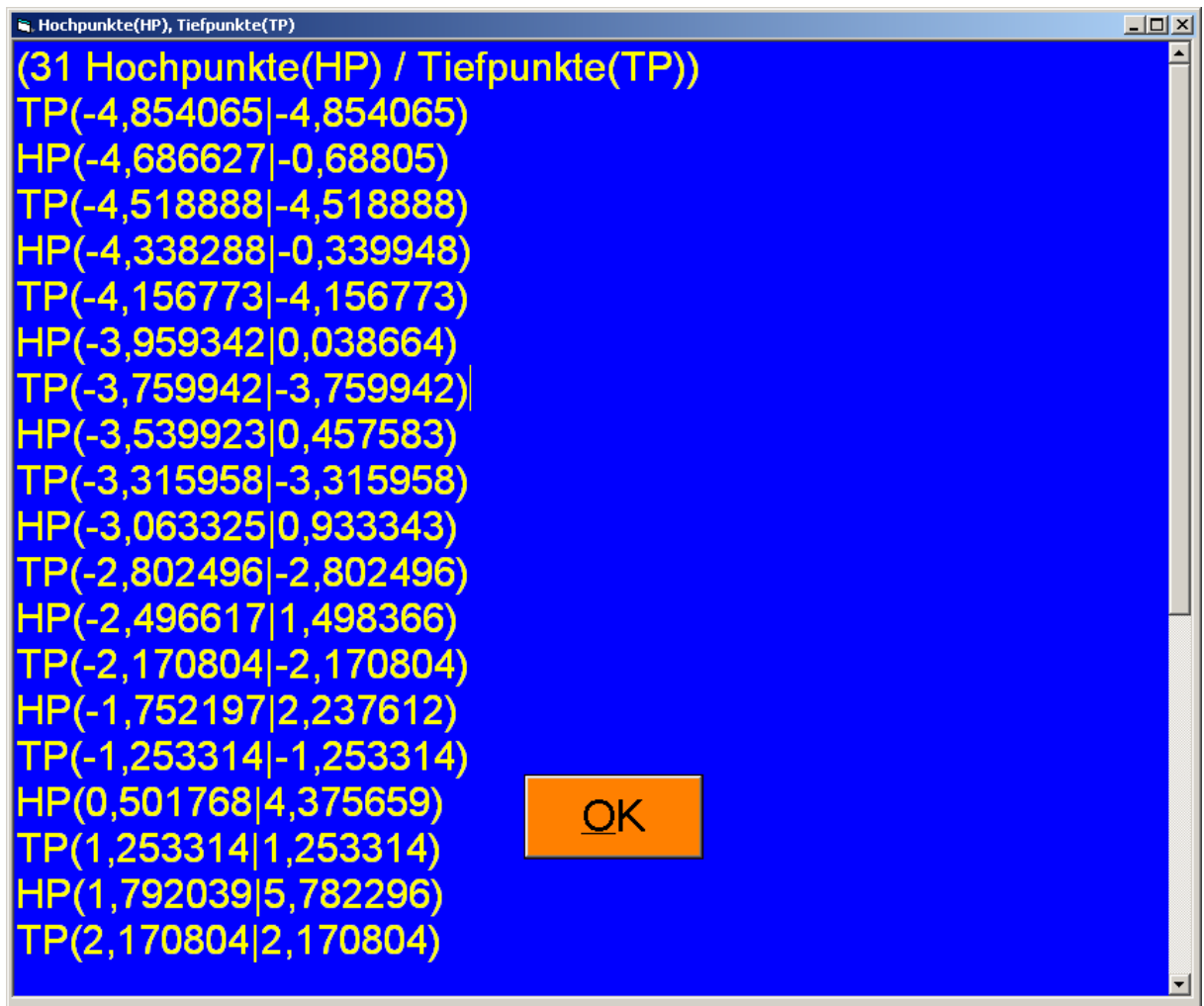


Bild 42

Graph der (abschnittsweise definierten) Funktion f:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{für } x < -2 \\ f(x) &= -2x - 1 && \text{für } -2 \leq x < 1 \\ f(x) &= 5(x-2)^2 - 8 && \text{für } x \geq 1 \end{aligned}$$

im Intervall $[-5,5 \dots 5,5]$

Eingabe (Textfenster "g(x)"):

$$(-2 \leq x < 1) * (-2 * x - 1) + (1 \leq x) * (5 * (x-2)^2 - 8)$$

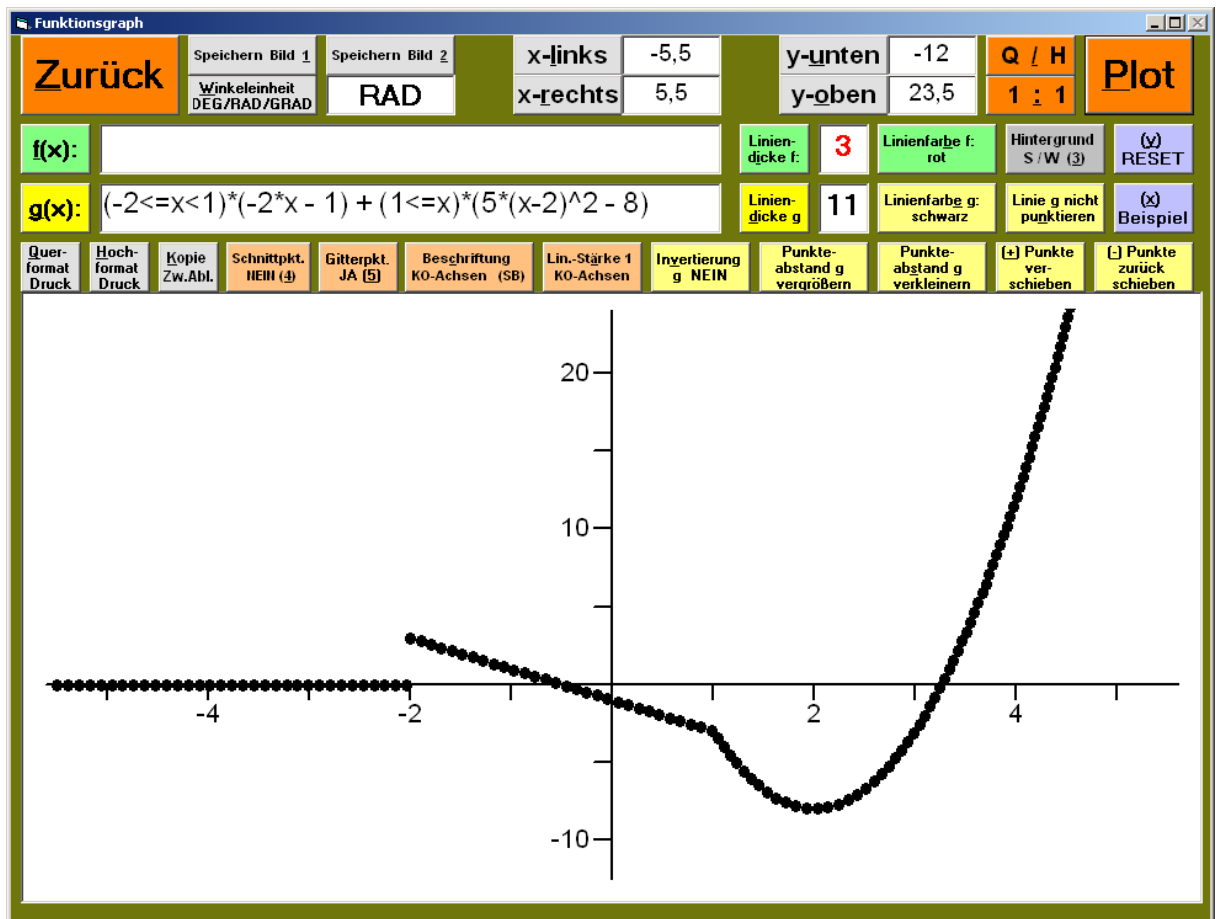


Bild 43

Der Abstand des Punktes $P(3|3)$ zu dem Graphen mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[-5...5]$ ist zu berechnen.

Eingabe:

„ABST -5 | 5 || P 3 | 3 || x^2+1 “

Ausgabe:

„Gegeben sind der Punkt $P(3|3)$ und der Graph $f: f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[-5...5]$.

Von allen auf f liegenden Punkten liegt $Q(1,567468|3,456957)$ Abstand(QP) = 1,503648 dem Punkt P am nächsten.“

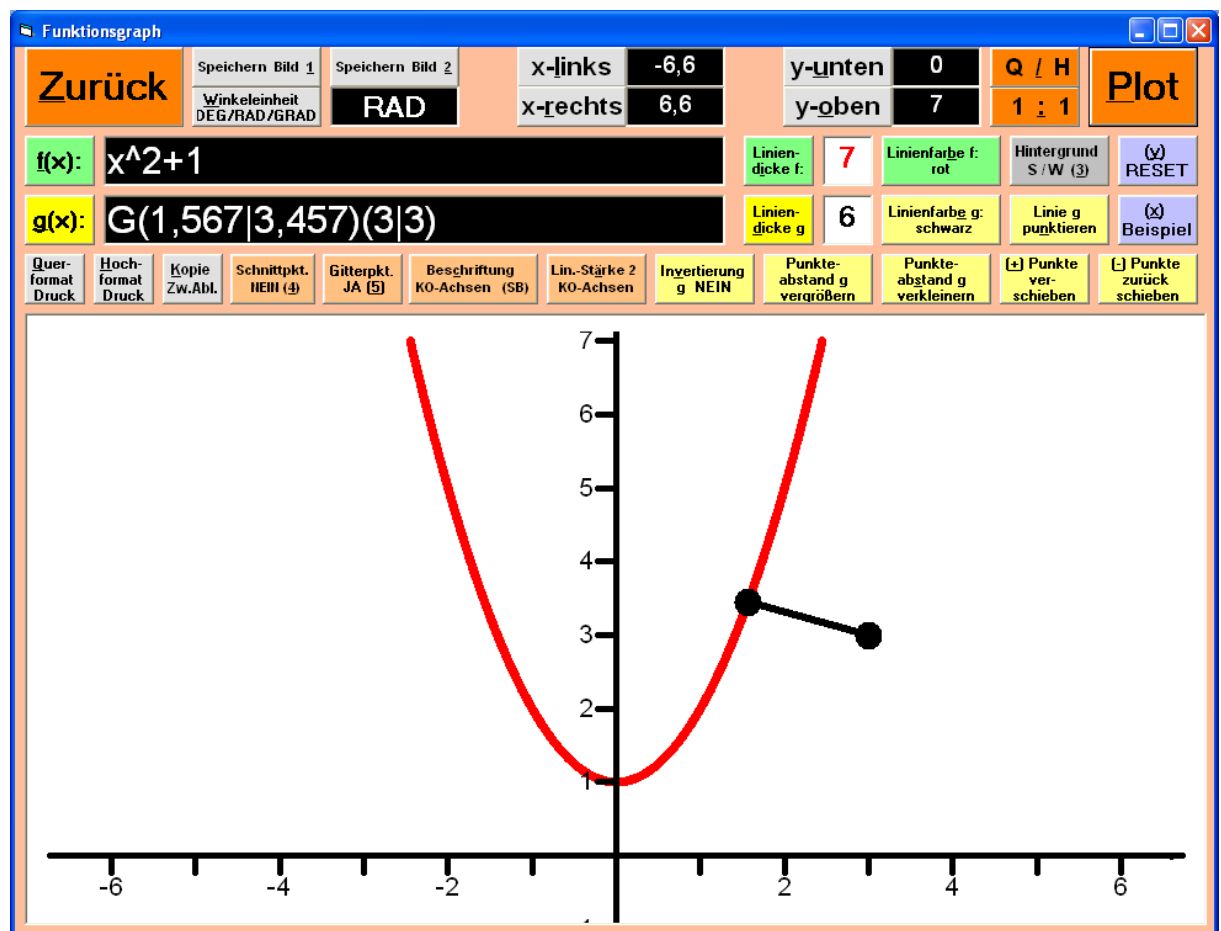


Bild 44

Der Abstand des Punktes P(-3|4) zu dem Graphen mit der Gleichung $y = \ln(2+(x+3)^2)$ im Intervall $[0...20]$ ist zu berechnen.

Eingabe:

„ABST 0|20||P-3|4|| $\ln(2+(x+3)^2)$ “

Ausgabe:

Gegeben sind der Punkt P(-3|4) und

der Graph $f: f(x) = \ln(2+(x+3)^2)$

im Intervall $[-50...70]$.

Von allen auf f liegenden Punkten liegt

Q(-4,686525|1,577817) Abstand(QP) = 2,951498

Q(-1,313475|1,577817) Abstand(QP) = 2,951498

dem Punkt P am nächsten.“

Das Intervall $[0...20]$ wurde während des Programmablaufs auf $[-50...70]$ erweitert, um die Punkte Q des Graphen, die dem Punkt P am nächsten liegen, zu erfassen.

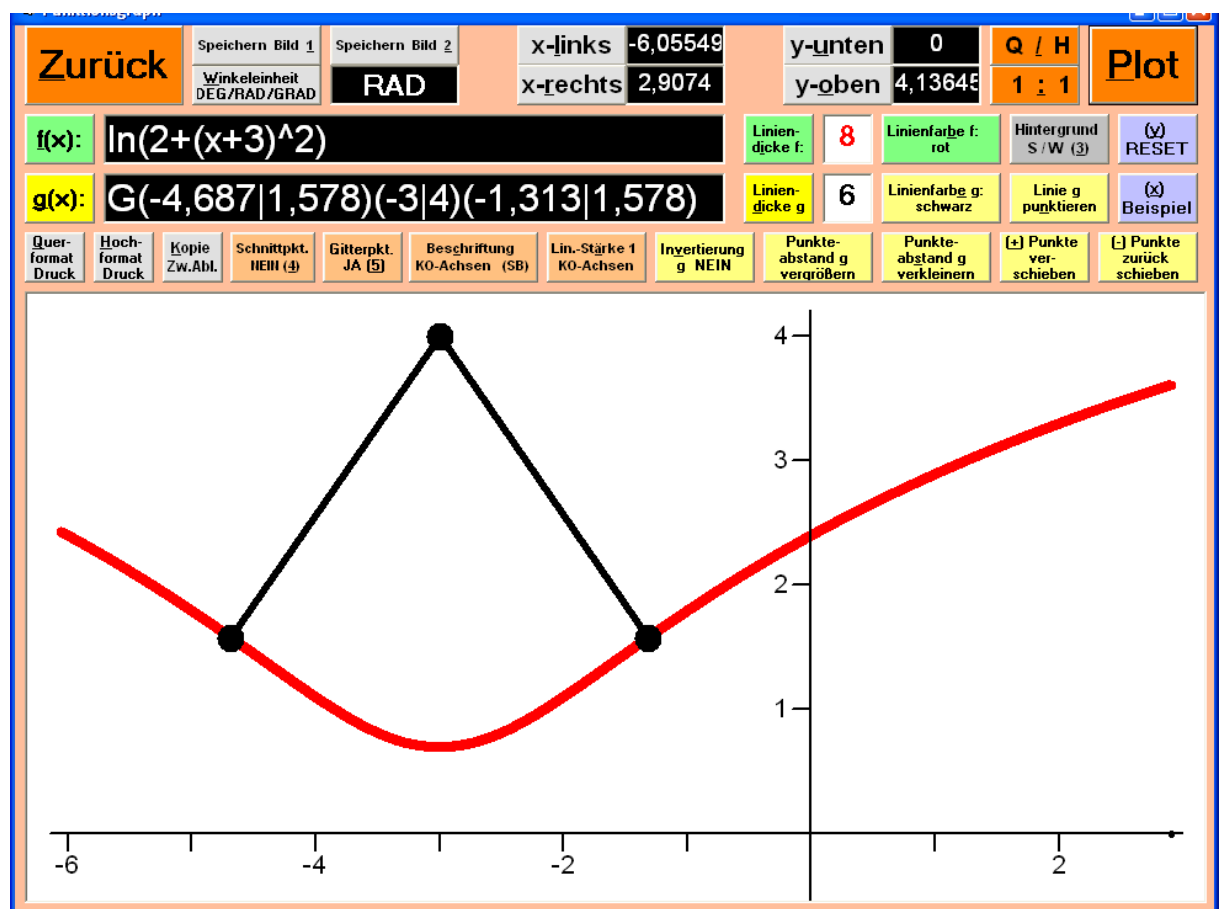


Bild 45

Links- und Rechtskurve des Graphen $f: f(x) = x^2 \cdot (12-x)/30$

Rote durchgezogene Linie: Linkskurve
Schwarze punktierte Linie: Rechtskurve

Eingabe (Fenster Funktionsgraph):

Textfeld f(x): „ $x^2 \cdot (12-x)/30$ “

Textfeld g(x): „ $((x^2 \cdot (12-x))/30 + 0,1) \cdot (x > 4) + 1000 \cdot (x \leq 4)$ “

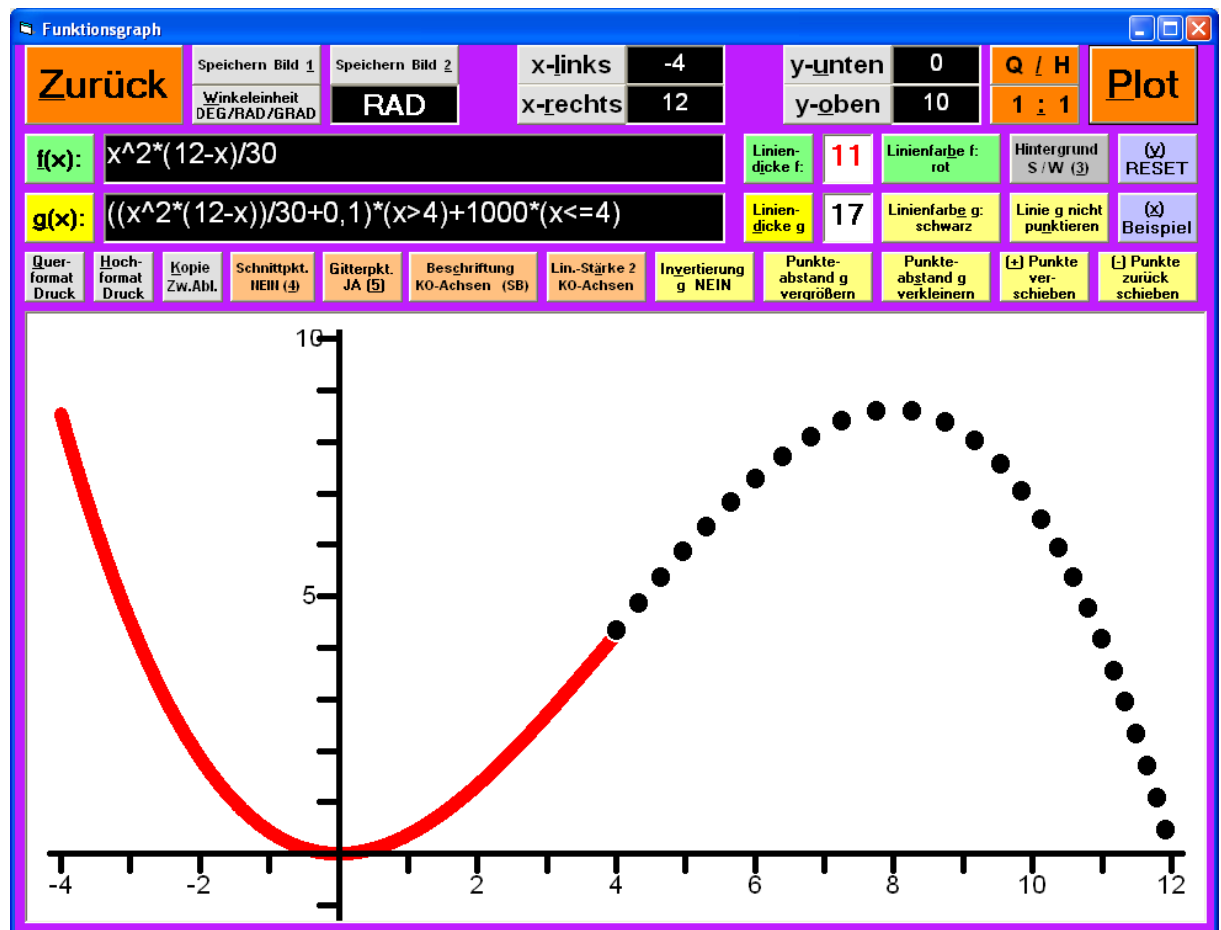


Bild 46**Nichtlineare Gleichungssysteme**

Das nichtlineare Gleichungssystem:

$$f(x,y) = x^2 + y - 3 + 10 \cdot \cos(x^2) = 0$$

$$g(x,y) = 2 \cdot x - y^2 = 0$$

ist zu lösen.

Eingabe:

„GXY|xa-20|xe20|ya-20|ye20|x^2+y-3+10*cos(x^2)|2*x-y^2|“

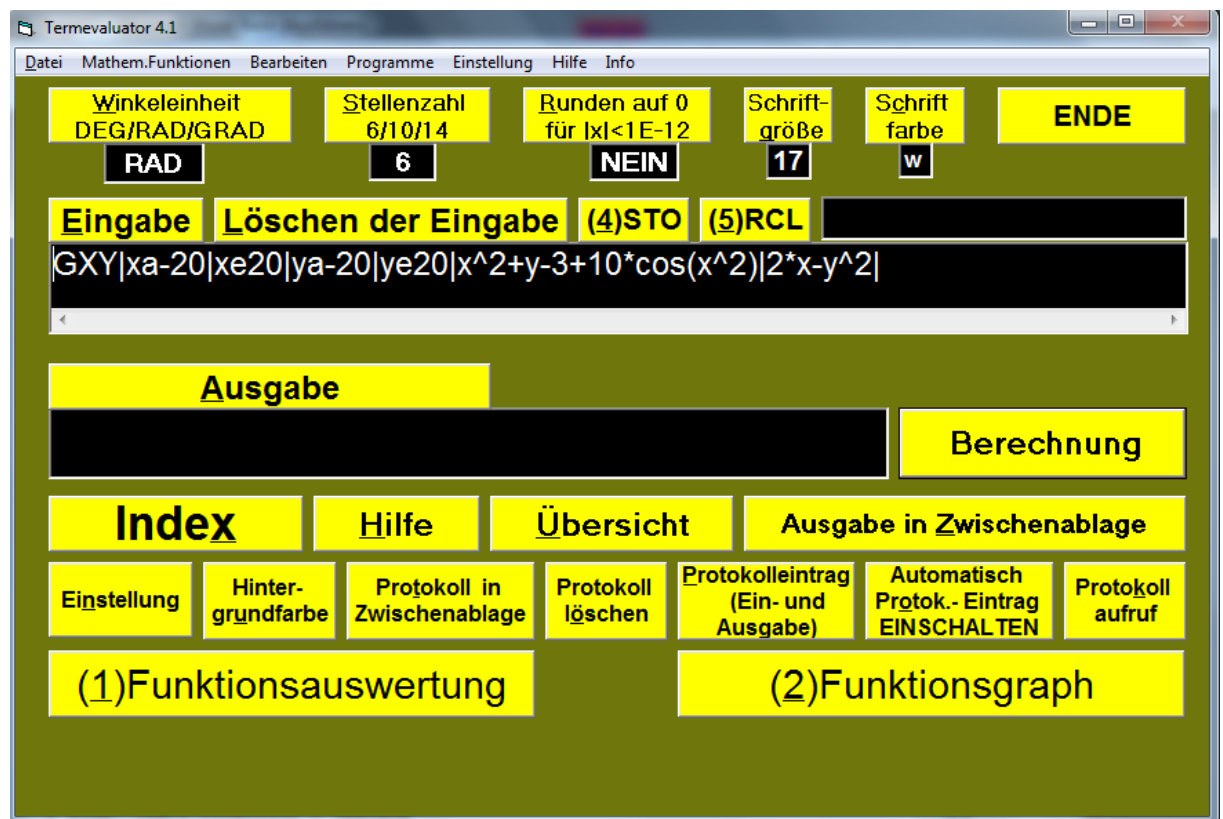


Bild 47**Nichtlineare Gleichungssysteme**Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems:

$$f(x, y) = x^2 + y - 3 + 10 \cdot \cos(x^2) = 0$$

$$g(x, y) = 2 \cdot x - y^2 = 0$$

$x(1) = 3,2372 \quad y(1) = -2,544484$
 $x(2) = 2,178644 \quad y(2) = -2,087412$
 $x(3) = 1,113328 \quad y(3) = -1,492198$
 $x(4) = 2,970981 \quad y(4) = 2,437614$
 $x(5) = 3,130565 \quad y(5) = 2,502225$
 $x(6) = 3,928896 \quad y(6) = -2,803175$
 $x(7) = 3,97334 \quad y(7) = -2,818986$
 $x(8) = 2,851653 \quad y(8) = -2,388159$
 $x(9) = 1,260318 \quad y(9) = 1,587651$
 $x(10) = 2,089151 \quad y(10) = 2,04409$

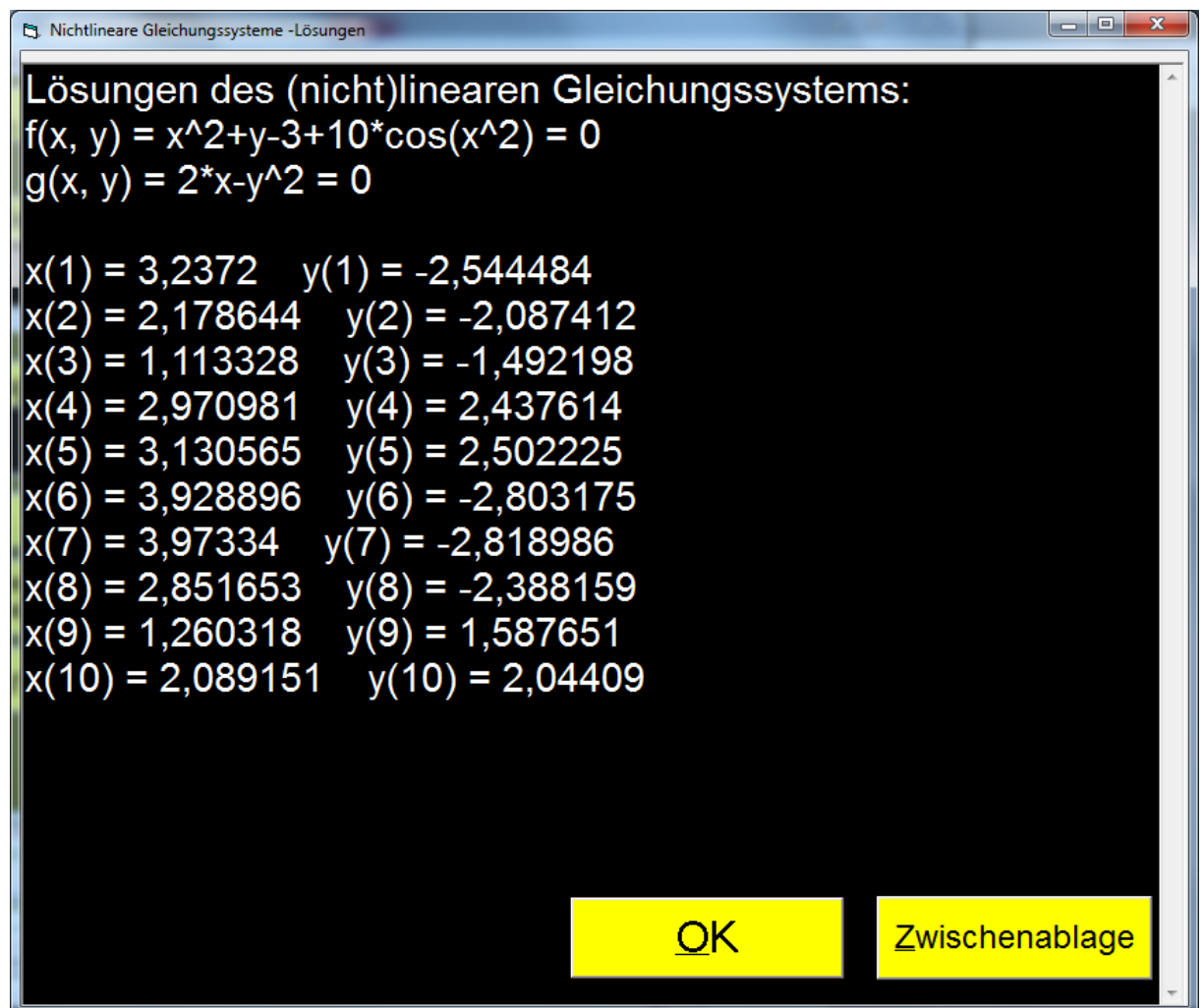


Bild 48

Kurve mit der impliziten Gleichung:

$$F(x|y)=0.5*x^2+0.9*y^2-x*y-3*x = 0$$

Eingabe:

“KURVE

|xa-10|xe15|ya-10|ye10|F(x|y)=0.5*x^2+0.9*y^2-x*y-3*x|“

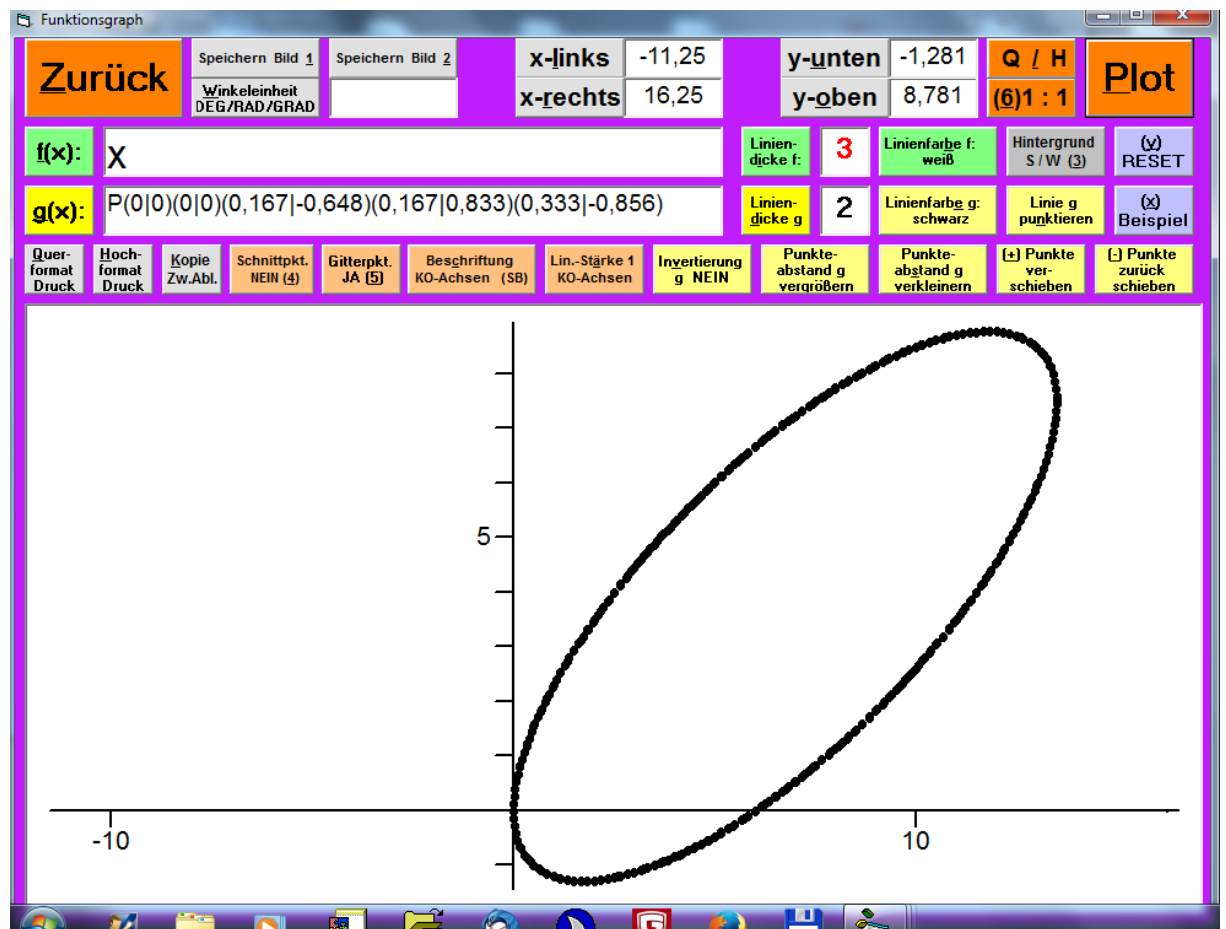


Bild 49

Kurve mit der impliziten Gleichung:

$$F(x|y)=x*\sin(x) - y*\sin(y) = 0$$

(x und y im Bogenmaß (RAD))

x-Achse und y-Achse werden im gleichen Maßstab skaliert!.

Eingabe:

„KURVE |xa-20|xe20|ya-20|ye20| F(x|y)=x*sin(x) – y*sin(y)|“

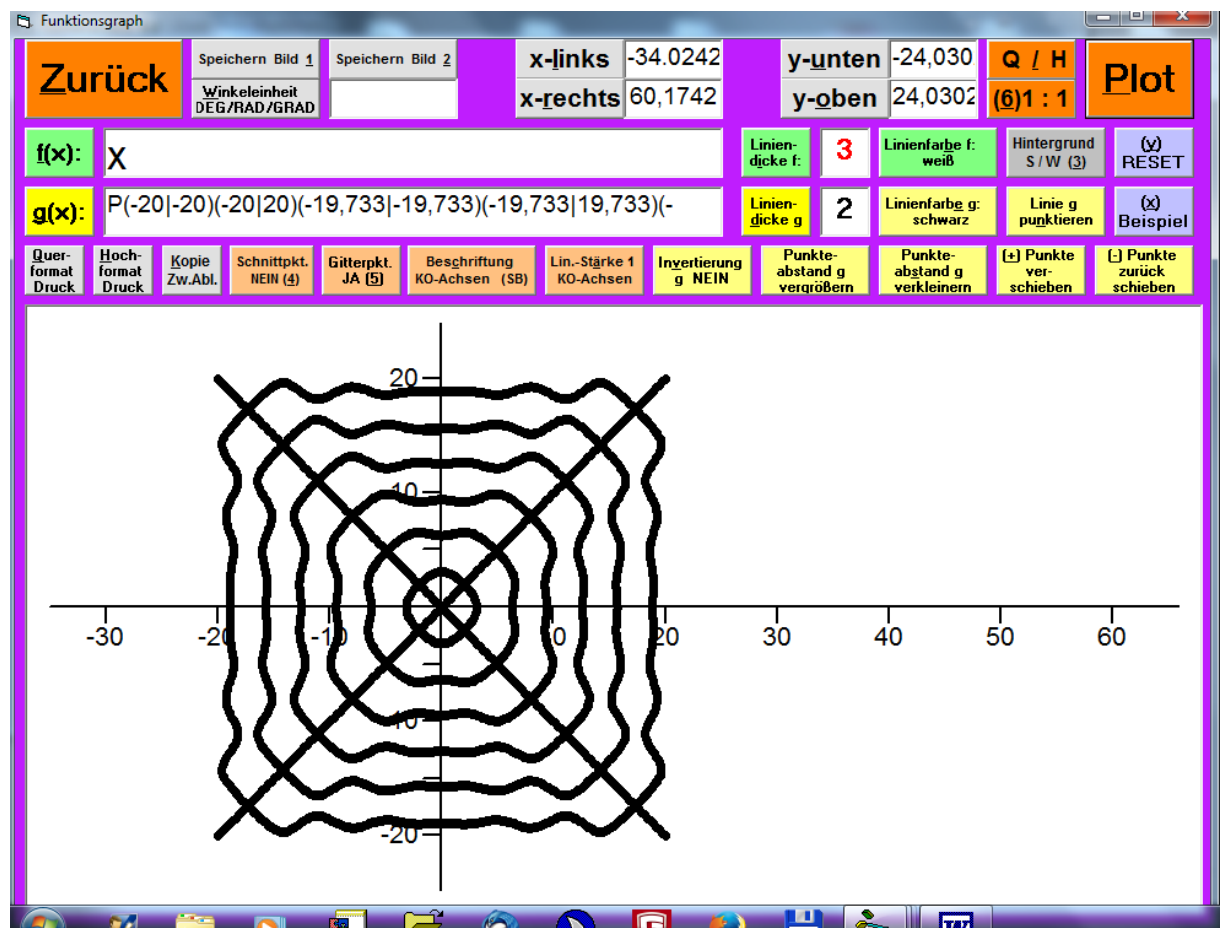


Bild 50

„Logarithmische Spirale“ mit den Parametergleichungen:

$$x(t) = \ln(t) \cdot \cos(t) \quad | \quad y(t) = \ln(t) \cdot \sin(t)$$

(x und y im Bogenmaß (RAD))

x-Achse und y-Achse werden im gleichen Maßstab skaliert!.

Eingabe:

„PKURVE |ta1|te80|x(t)=ln(t)*cos(t) | y(t)=ln(t)*sin(t)|“

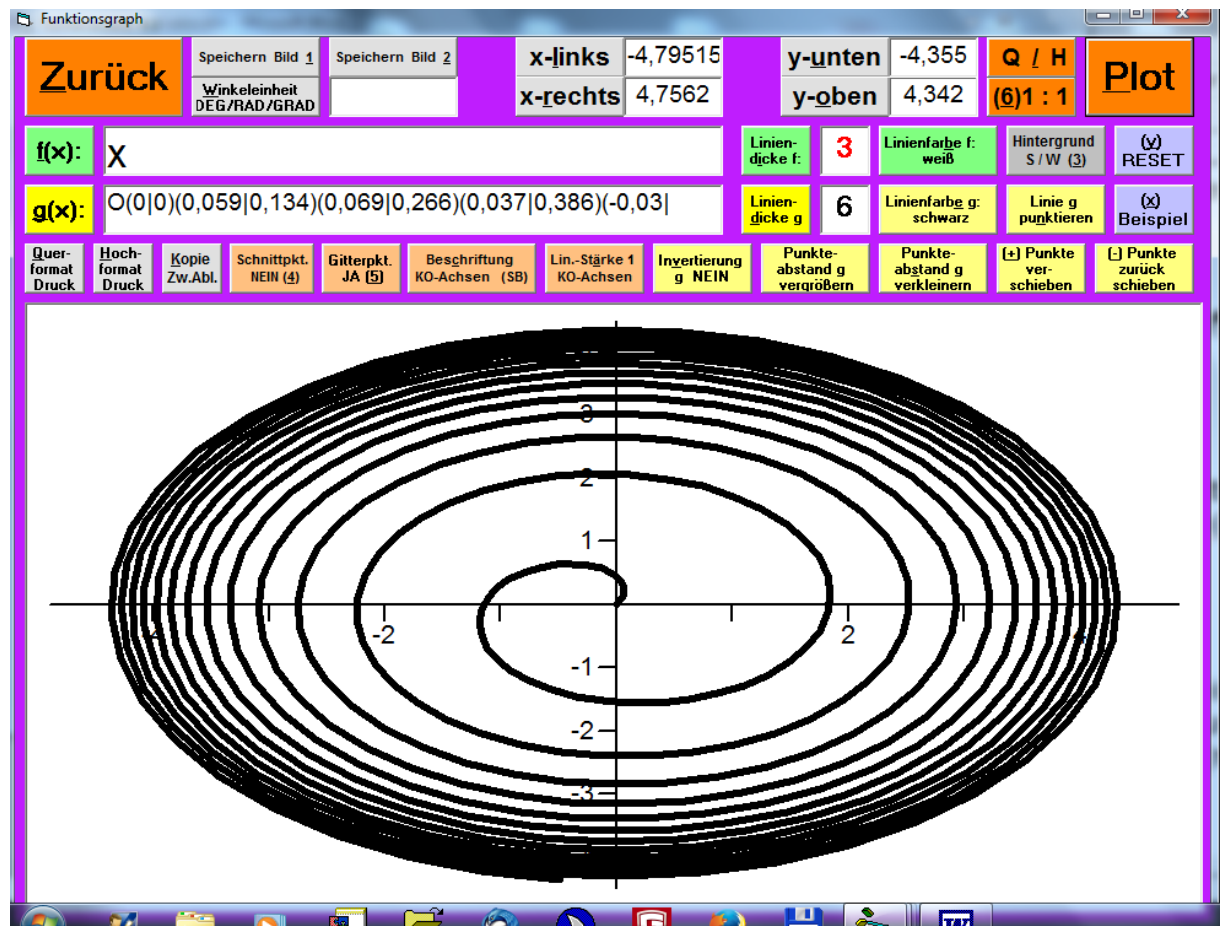


Bild 51

„Wurfparabel“: mit den Parametergleichungen:

$$x(t) = 9 \cdot \cos(45) \cdot t \mid y(t) = 9 \cdot \sin(45) \cdot t - 9,81/2 \cdot t^2$$

(x und y im Bogenmaß (RAD))

x-Achse und y-Achse werden im gleichen Maßstab skaliert!

Eingabe:

„PKURVE|ta 0|te10|ya-10|ye10| x(t)=9*cos(45)*t | y(t)=9*sin(45)*t-9,81/2*t^2|“

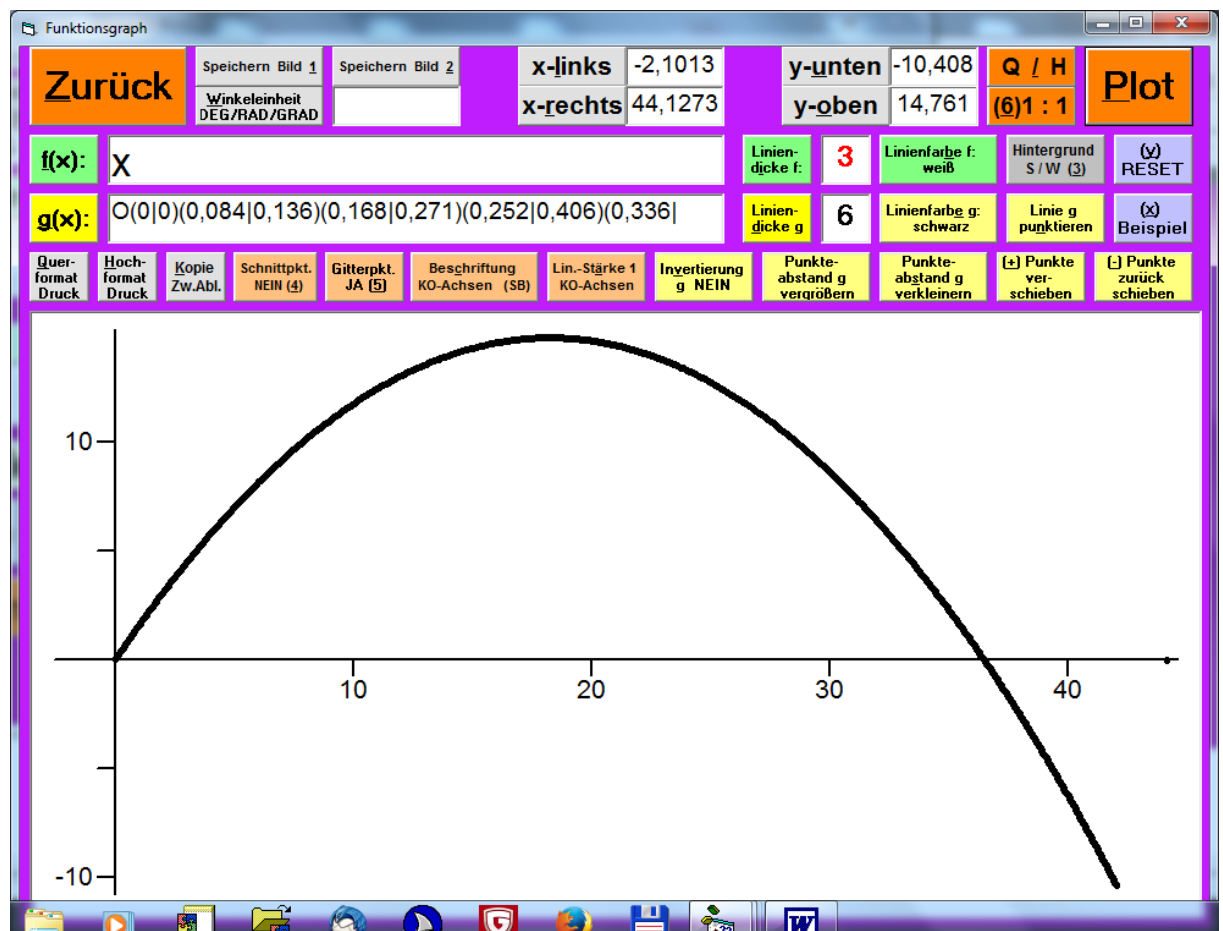


Bild 52

Berechnung der Koeffizienten des Interpolationspolynoms 6. Grades zu den 7 Wertepaaren:

**(-3|1), (-2|-1), (-1|11), (0|-1), (1|-5), (2|11), (3|-3)
und Berechnung des Funktionswertes
an der Stelle $x=2,5$**

Eingabe:

POLY xx2,5 x-3y1x-2y-1x-1y11x0y-1x1y-5x2y11x3y-3

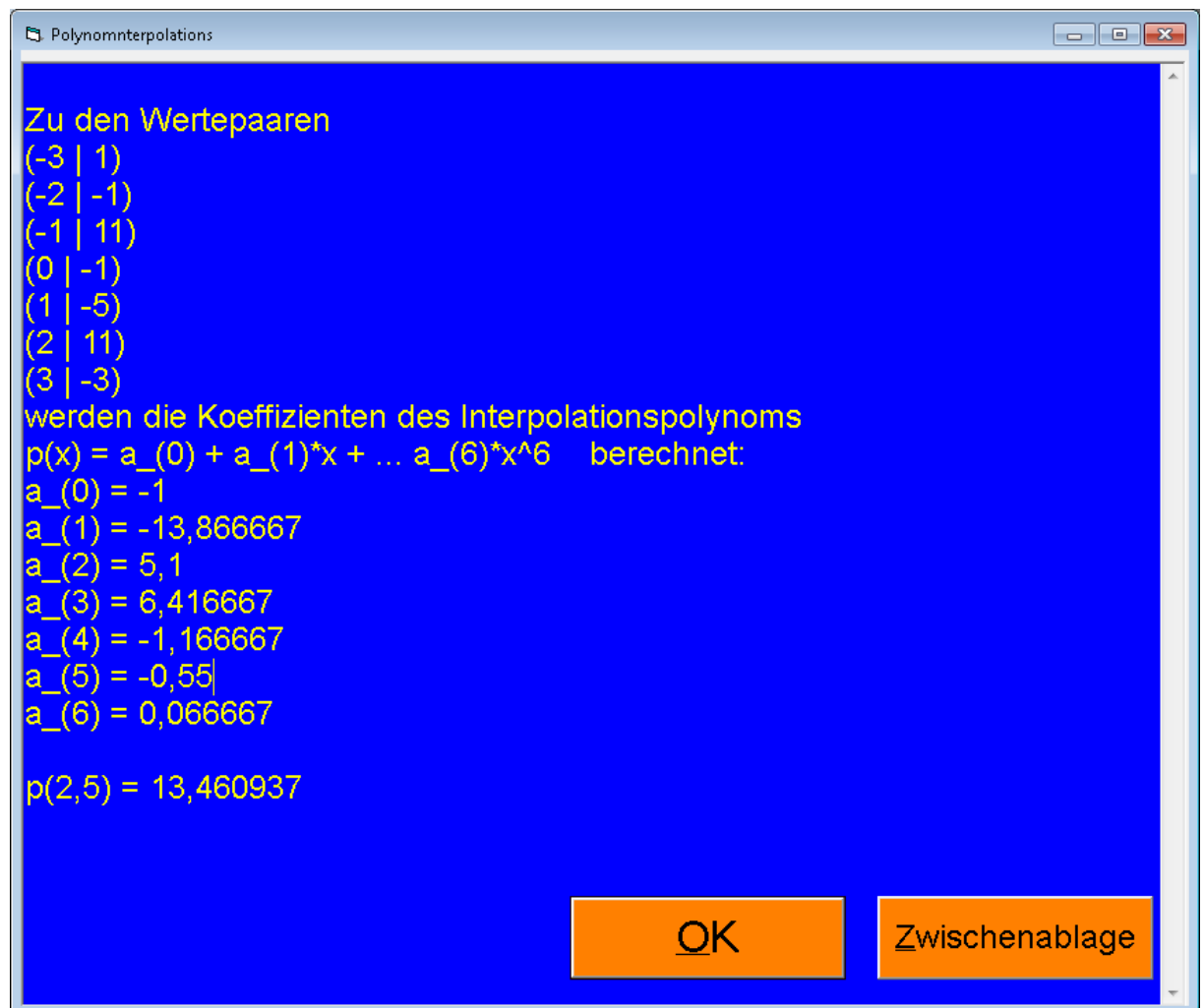


Bild 53

Darstellung der Punkte mit den Koordinaten: $(-3|1)$, $(-2|-1)$, $(-1|11)$, $(0|-1)$, $(1|-5)$, $(2|11)$, $(3|-3)$ und des zugehörigen Interpolationspolynoms 6. Grades

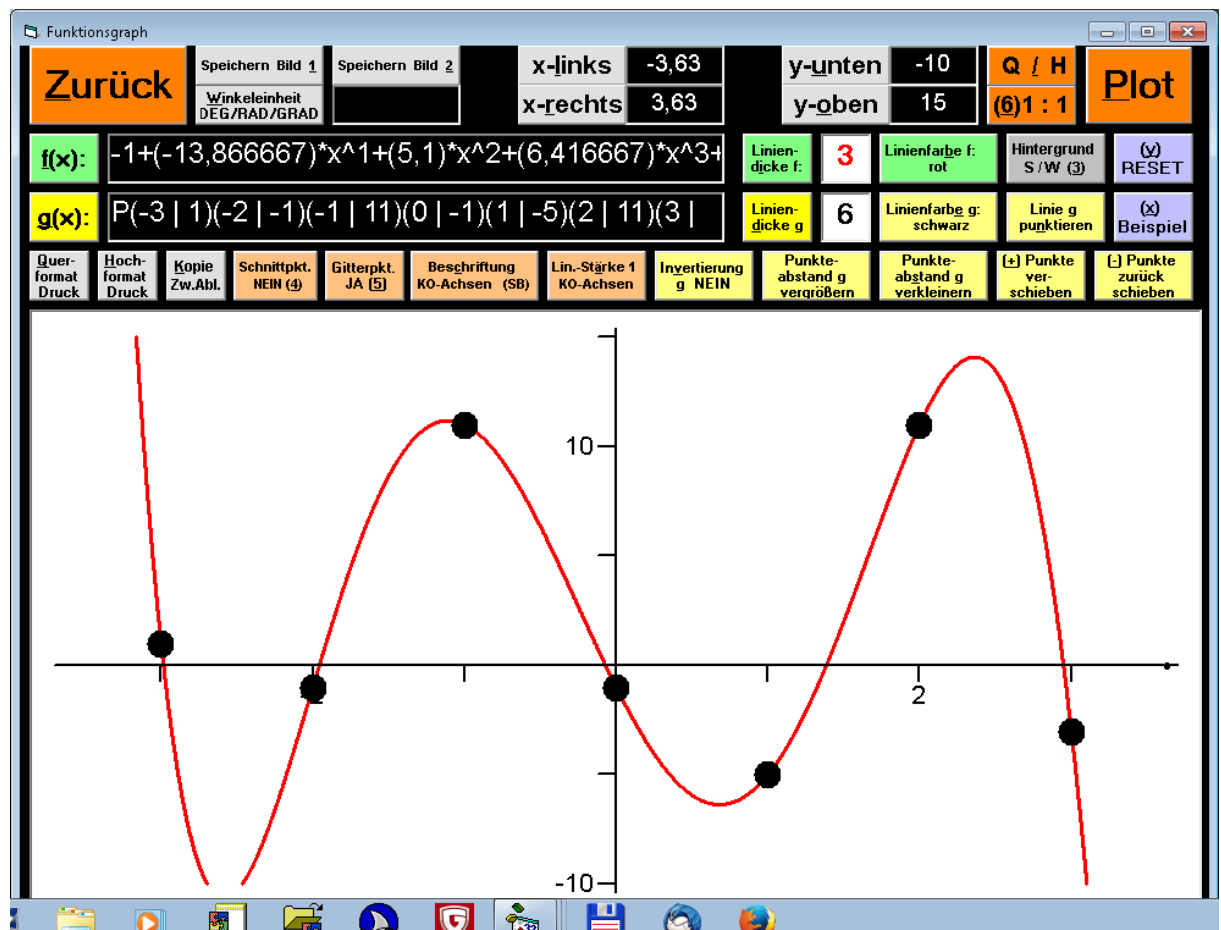


Bild 54

Darstellung der Kurvenschar $f_c: f(x)=c \cdot x^2+c$
für $c = -4, -2, 0, 2$ und 4

Eingabe:

„SCHAR xa-3|xb3|ca-4|cb4|step2|f(x)=c*x^2+c“

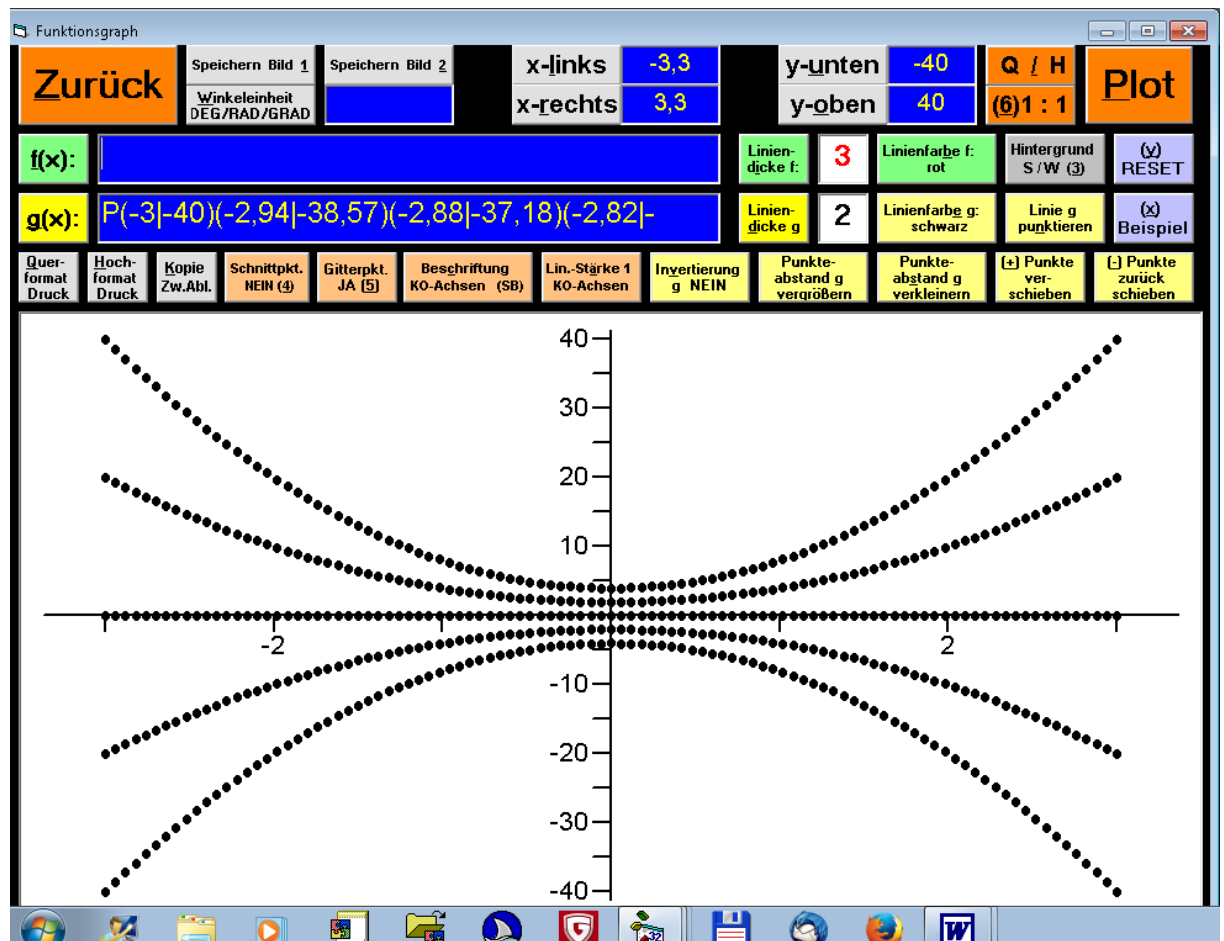


Bild 55

**Darstellung der Kurvenschar g_c : $g(x)=x^2 \cdot (x - c)$
für $c = -4, -3, \dots, 4$**

Eingabe:

„SCHAR 110 xa-1|xb5|ca-4|cb4|step1| $g(x)=x^2 \cdot (x-c)$ “

y-oben: „10“; y-unten: „-10“

Zusätzlich wird die Ortslinie $t(x)$ für alle Tiefpunkte der Kurvenschar f_c (Textfenster $f(x)$: „ $t(x) = -0,5x^3$ “) gezeichnet.

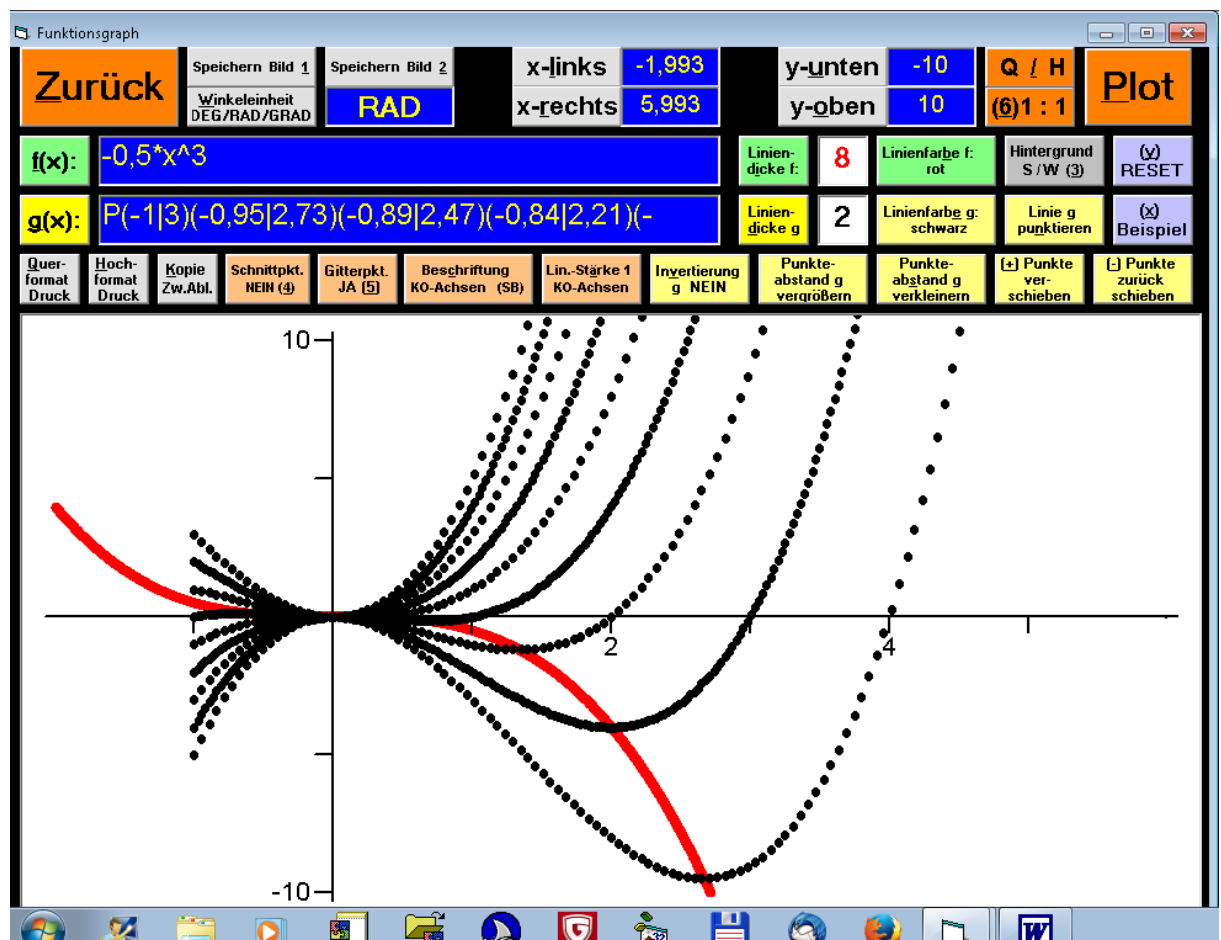


Bild 56

Berechnung der Koeffizienten des kubischen Interpolationssplines zu den 4 Wertepaaren: (-3|1) (-2|-1) (-1|11) (2|0) und Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $x=-2,5$

Eingabe:

“SPLINE xx-2,5 x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0“

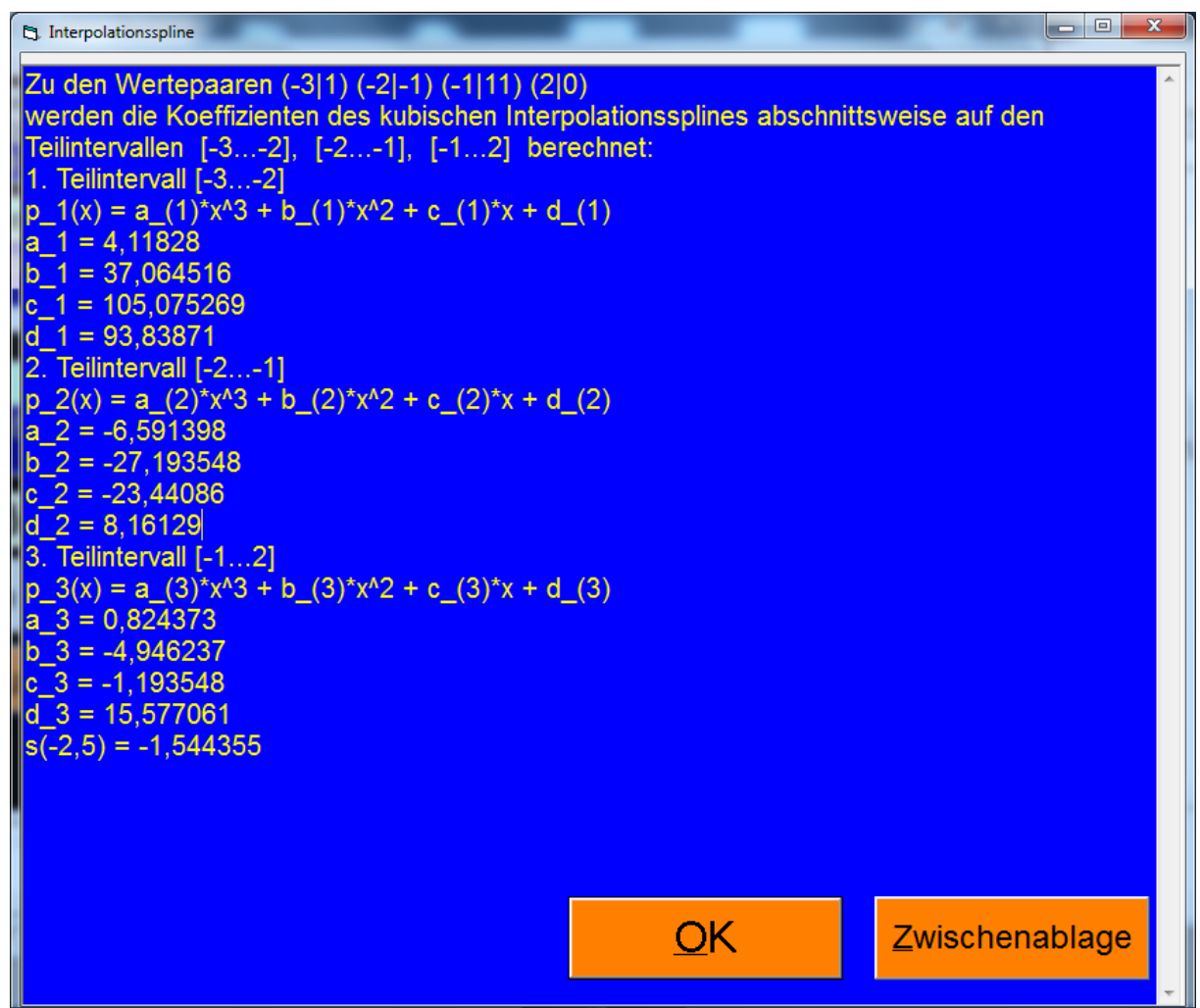


Bild 57

**Darstellung der Punkte mit den Koordinaten:
 (-3|1) (-2|-1) (-1|11) (2|0)
 und des zugehörigen kubischen Interpolations-
 splines**

Eingabe:

“SPLINE P x-3 y1 x-2 y-1 x-1 y11 x2 y0“

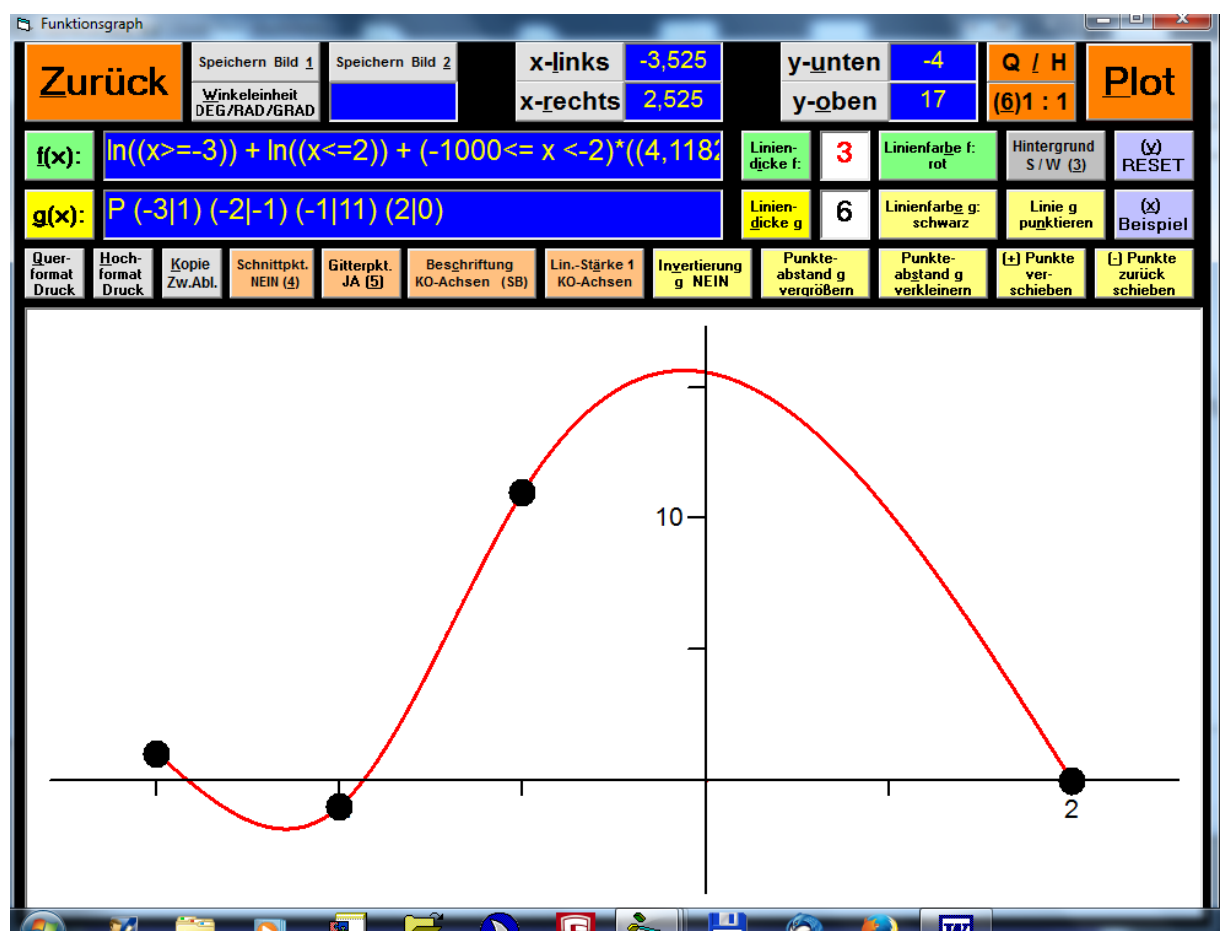


Bild 58

Darstellung des Kegelschnitts mit der Gleichung:
 $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y - 123 = 0$

Eingabe:

KEGEL $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y - 123 = 0$

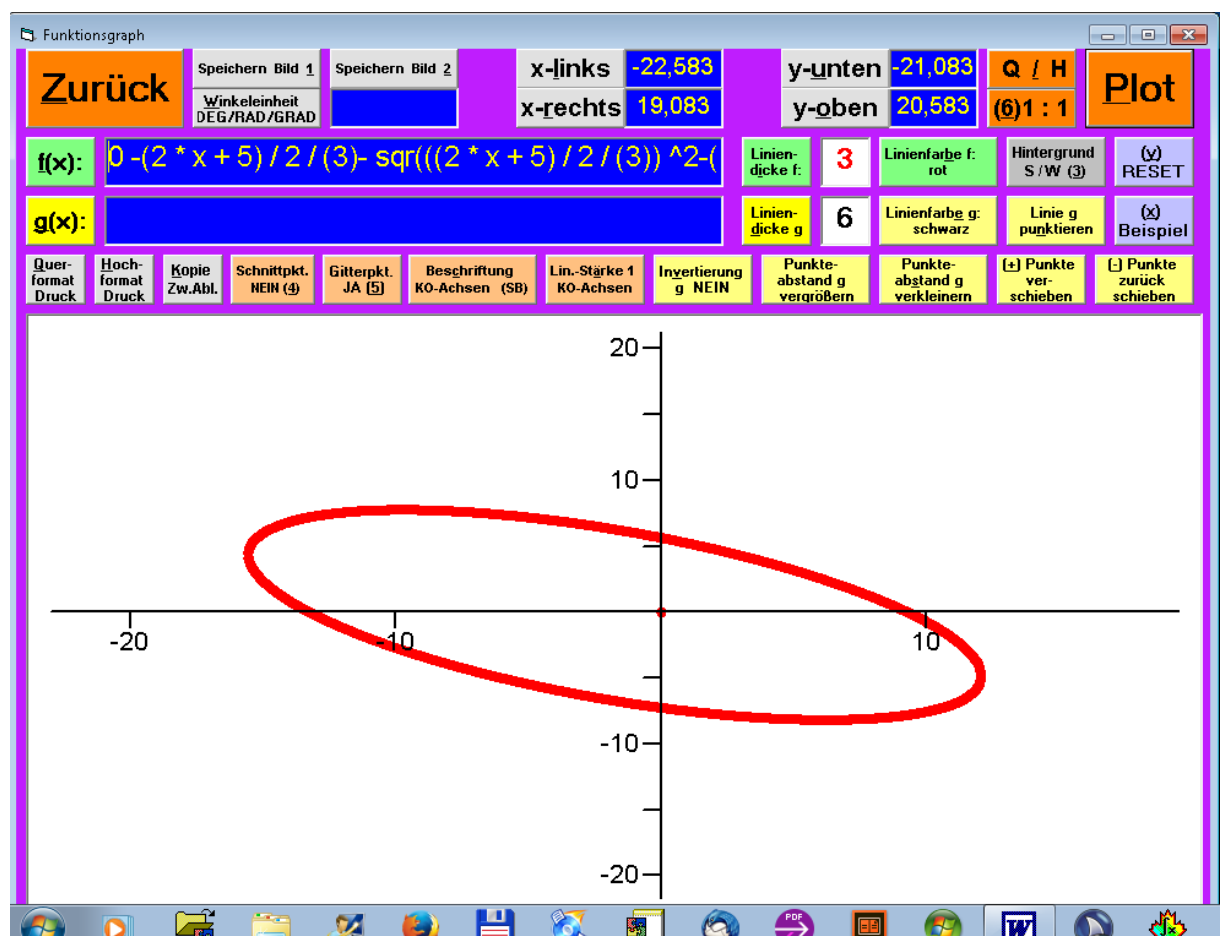
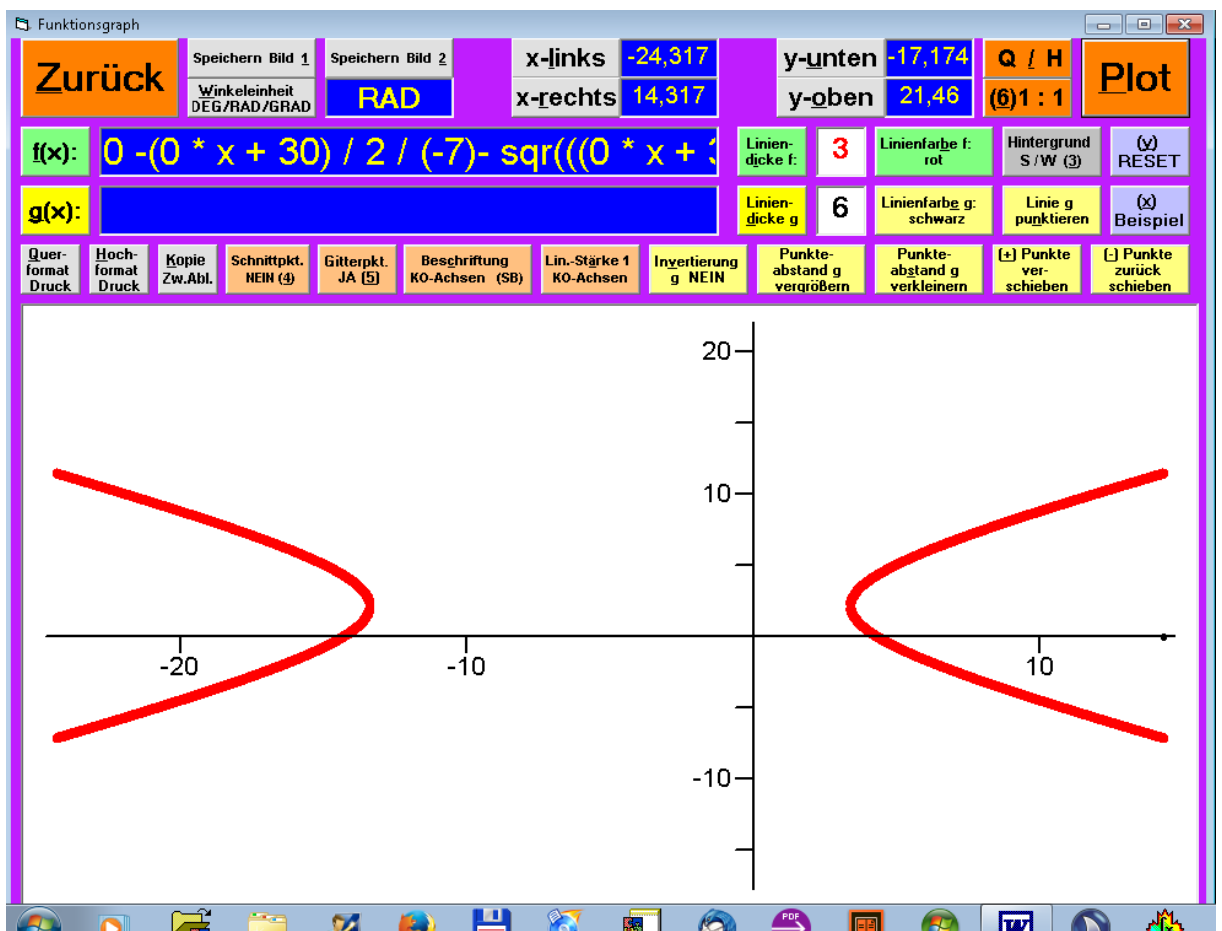


Bild 59

Darstellung des Kegelschnitts mit der Gleichung:
 $2x^2 - 7y^2 + 20x + 30y - 123 = 0$

Eingabe:

„KEGEL $2x^2 - 7y^2 + 20x + 30y - 123 = 0$ “



Das Programm "**Termevaluator**" wurde mit **Visual Basic 6™** erstellt. Es kann sowohl "für sich" als auch integriert in einer Textverarbeitung eingesetzt werden.

Die Entwicklung des "**Termevaluator**" wäre ohne den Einsatz eines "**Mathematik-Parsers**" nicht möglich gewesen. Er übernimmt die Aufgabe, während der Laufzeit des Programms die vom Anwender eingegebenen mathematischen Ausdrücke zu analysieren und zu kompilieren.

Zum Einsatz kam die Software "**clsMathParser 4**" (entwickelt von "Foxes-Team" : L. Volpi, M. Ruder, T. Zeuschler, L. Dossche, A. d. Grammont), die als Freeware im Internet zugänglich ist.

Ende